

۱. ماتریس ضرب ماتریس زیر را محاسبه کنید:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = (1 \ 10) \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -7 \\ -22 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$B_1^T \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ -4) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = (-7 \ -8 \ 17)$$

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -15 \\ 16 & 57 & 40 \\ 2 & 16 & 34 \end{pmatrix}$$

$$B_1 \cdot A_2 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}_{3 \times 1} (1 \ 10)_{1 \times 2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}_{3 \times 1} (2 \ 31)_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 31 \\ 4 & 62 \\ -8 & -124 \end{pmatrix}$$

(2 31)

۲. دترمینان ماتریس های زیر را محاسبه کنید:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (0 - 32 + 0) - (10 + 32 + 0) = -74$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{x_2} |A_2| = 0$$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 11 & -21 & 7 \\ 0.5 & 15 & -5 \\ 21 & 24 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 0 = 6$$

وجود ستون صفر

$$|C_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|C_2| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 13 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 13 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{vmatrix} = 13 \times 10 \times 0.5 = 65$$

ماتریس قطری

به روش سبک
حرف ستون
اول

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \times 13 \times (-7) \times 1 = -910$$

به سبک

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 12 \times 2 = 72$$

به سبک

$$|E_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{E_{33}} = (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

به سبک ستون سوم

$$= (3 + 4 + 32) - (24 + 2 + 8) = 39 - 34 = 5$$

$$|E_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{E_{31}} = (-1)^{3+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

به سبک ستون سوم

$$= (0 - 4 + 0) - (4 - 6)$$

$$|A| = |A^T|$$

۳. با استفاده از روش سطر اول درستی را نشان دهید.

حل سطر اول

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$