بسم الله

جزوه درس

ریاضیات مهندسی

راحیل زرگری نژاد- کیوان موسوی

(ویرایش دوم)

فهرست:

بخش اول:

یادآوری مباحث پیش نیاز

درس ریاضیات مهندسی

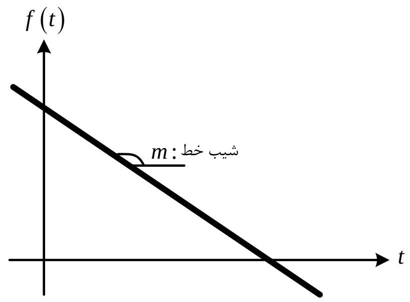
بخش اول: یاد آوری مباحث پیش نیاز درس ریاضیات مهندسی

۱-۱- مقدمه

از آنجا که درس ریاضیات مهندسی یکی از مهمترین دروس، در دوره کارشناسی رشته مهندسی برق می باشد، به منظور فراگیری هر چه بهتر این درس، ابتدا مباحث پیش نیاز درس را مرور می نماییم. بدیهیست که بررسی دقیق و جزئی این مطالب از حد یک بخش درسی فراتر بوده و مطالب ذکر شده در این بخش صرفاً جهت یادآوری مطالب می باشد.

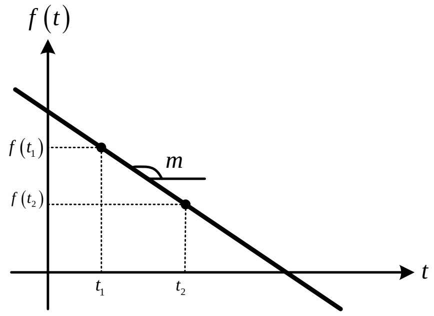
۱-۲- نوشتن معادله خط با استفاده از نمودار آن و محاسبه شیب:

اگر نمودار یک خط مطابق شکل زیر در دسترس باشد،



شکل ۱-۱: نمودار یک خط دلخواه

برای نوشتن معادله آن خط ابتدا دو زوج نقطه **دلخواه** $(t_1, f(t_1))$ و $(t_2, f(t_2))$ بر روی آن مشخص می نماییم:



شکل ۱-۲: نمودار یک خط شکل ۱-۱ با مشخص کردن دو زوج نقطه دلخواه $(t_1, f(t_1))$ و $(t_2, f(t_2))$ بر روی آن

آنگاه شیب خط و معادله توصیف کننده آن به ترتیب با روابط زیر بدست می آیند:

شیب خط (۱-۱)
$$m = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}$$

معادله خط (۱-۲)
$$f(t) - f(t_1) = m(t - t_1)$$

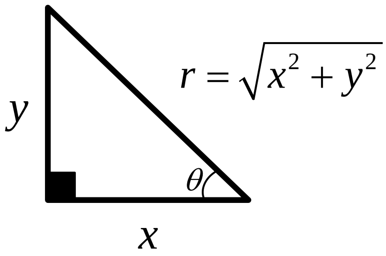
نکته: اگر زاویه خط مورد نظر با محور افقی، حاده باشد، شیب خط مثبت و اگر منفرجه باشد شیب خط منفی خواهد بود.

۱-۳- توابع مثلثاتی و روابط بین آنها:

روابط مثلثاتی از روابط زوایای بین اضلاع یک مثلث قائم الزاویه بدست می آید. به شکل زیر و روابط مربوطه توجه کنید:

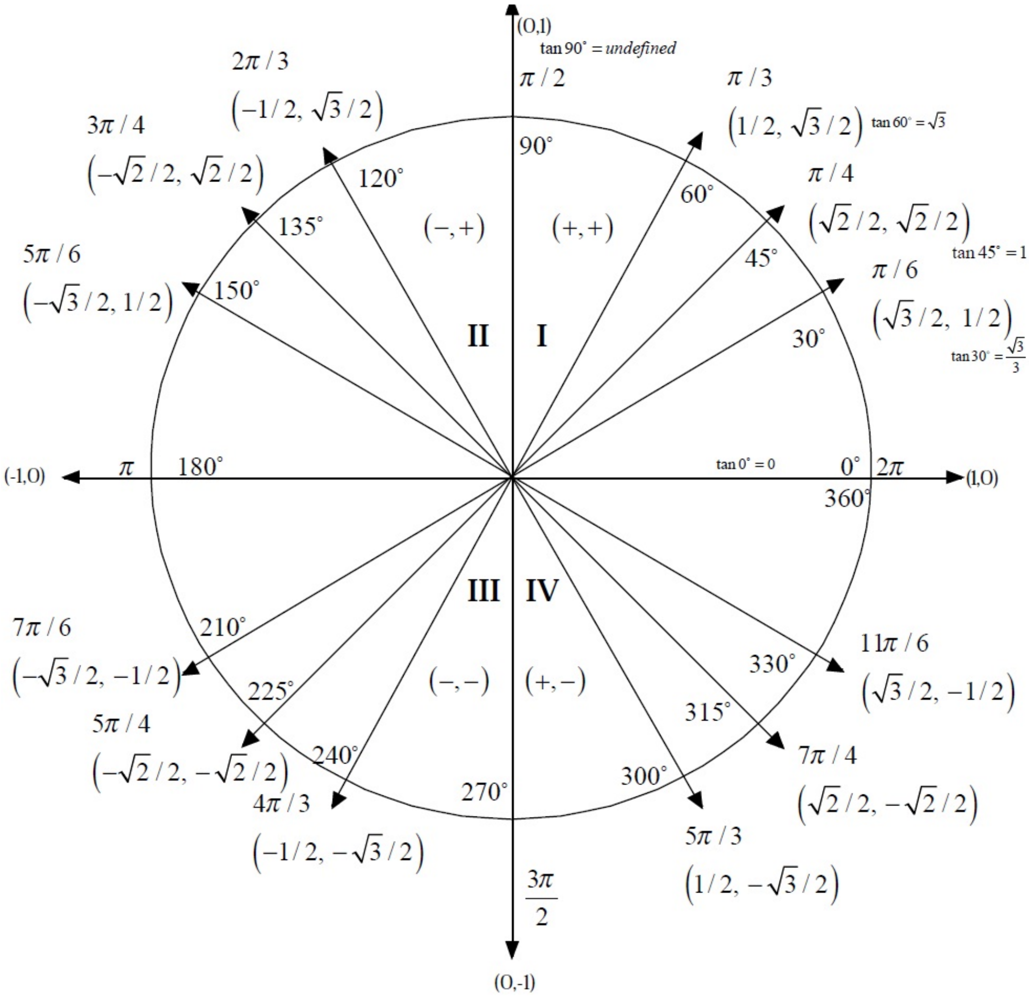
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$$



شکل ۱-۳: مثلث قائم الزاویه و روابط مربوط به آن

شکل زیر دایره مثلثاتی و به ترتیب کسینوس و سینوس زوایای اصلی را نمایش می دهد:



شکل ۱-۴: دایره مثلثاتی و روابط بین زوایای اصلی

با یادآوری چند رابطه مثلثاتی مهم، این بحث را به پایان می بریم:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \tag{۱-۳}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \tag{۱-۴}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right] \tag{۱-۵}$$

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right] \tag{۱-۶}$$

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right] \tag{۱-۷}$$

$$\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right] \tag{۱-۸}$$

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \tag{۱-۹}$$

$$\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2} \tag{۱-۱۰}$$

$$\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2} \tag{۱-۱۱}$$

$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x) \tag{۱-۱۲}$$

۱-۴- مشتق یک تابع:

مفهوم مشتق، بصورت آهنگ (نرخ) تغییرات لحظه ای یک تابع نسبت به تغییرات یک متغیر خاص تعریف می گردد. مشتق یک تابع پیوسته $f(t)$ نسبت به متغیر t با نمادهای مختلفی از جمله $f'(t)$ ، $\frac{df(t)}{dt}$ یا f_t نشان داده شده و بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \tag{۱-۱۳}$$

همچنین مشتق تابع پیوسته $f(t)$ نسبت به متغیر در نقطه خاص $t=t_0$ بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$f'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{۱-۱۴}$$

مثال ۱-۱

مشتق توابع زیر را محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=K$

با استفاده از رابطه ۱-۱۳ داریم:

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K-K}{\Delta t}=0$$

۲) $f(t)=\sin(t)$

با استفاده از رابطه ۱-۱۳ داریم:

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(t+\Delta t)-\sin(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\sin(t)\overbrace{\cos(\Delta t)}^{\approx\cos(0)=1}+\cos(t)\overbrace{\sin(\Delta t)}^{\approx\Delta t}\right)-\sin(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\cancel{\sin(t)}+\cos(t)(\Delta t)\right)-\cancel{\sin(t)}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(t)\,\cancel{(\Delta t)}}{\cancel{\Delta t}}=\cos(t)$$

همانطور که از مثال فوق مشخص است، محاسبه مشتق توابع با استفاده از رابطه ۱-۱۳ زمان بر بوده و راحت نیست. بنابراین برای محاسبه مشتق توابع معروف که در محاسبات ریاضی بیش از دیگر توابع مورد استفاده قرار می گیرند از جداول مشتق گیری استفاده می کنیم. این جداول دارای دو بخش مشخصات مشتق و جدول مشتقات توابع معروف می باشد:

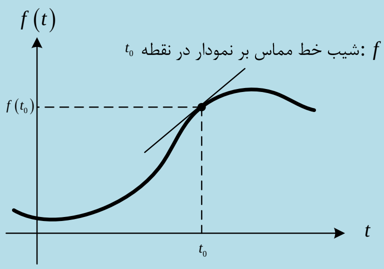
جدول ۱-۱: مشخصات مشتق گیری

ردیف	خصوصیت	رابطه مربوطه
۱.	مشتق تابع ثابت	$\frac{d}{dt}(K)=0$
۲.	ضریب ثابت در مشتق	$\frac{d}{dt}(k\,f(t))=k\frac{df(t)}{dt}$
۳.	جمع/تفاضل توابع	$\frac{d}{dt}(f(t)\pm g(t))=\frac{df(t)}{dt}\pm\frac{dg(t)}{dt}$
۴.	مشتق ضرب دو تابع	$\frac{d}{dt}(f(t)\times g(t))=\frac{df(t)}{dt}\times g(t)+\frac{dg(t)}{dt}\times f(t)$
۵.	مشتق تقسیم دو تابع	$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)=\frac{\frac{df(t)}{dt}\times g(t)-\frac{dg(t)}{dt}\times f(t)}{(g(t))^2}$
۶.	مشتق زنجیره ای	$\frac{df(t)}{dt}=\frac{df(t)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

جدول ۱-۲: مشتق توابع معروف

ردیف	رابطه مربوطه
۱.	$\frac{d}{dt}(t^n)=n\,t^{n-1}$
۲.	$\frac{d}{dt}(a^t)=\ln(a)a^t$
۳.	$\frac{d}{dt}(e^t)=e^t$
۴.	$\frac{d}{dt}(\sin(t))=\cos(t)$
۵.	$\frac{d}{dt}(\cos(t))=-\sin(t)$
۶.	$\frac{d}{dt}(\tan(t))=\frac{1}{\cos^2(t)}$
۷.	$\frac{d}{dt}(\ln(t))=\frac{1}{t}$
۸.	$\frac{d}{dt}(\sin^{-1}(t))=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
۹.	$\frac{d}{dt}(\cos^{-1}(t))=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
۱۰.	$\frac{d}{dt}(\tan^{-1}(t))=\frac{1}{1+t^2}$

◄ **نکته مهم: اگر نمودار $f(t)$ نسبت به متغیر t را داشته باشیم، مشتق این تابع در نقطه خاص $t=t_0$ برابر با شیب نمودار (یعنی شیب خط مماس بر نمودار) در آن نقطه خواهد بود.**



شیب مثبت به معنای تغییرات مثبت و شیب منفی به معنای تغییرات منفی تابع نسبت به متغیر مورد نظر می باشد

با ارائه مثال کاربرد این دو جدول بیشتر توضیح داده خواهد شد:

مثال ۱-۲

مشتق توابع زیر را نسبت به متغیر t محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=e^{kt}$

با استفاده از تغییر متغیر و رابطه مشتق زنجیره ای داریم:

$$x=kt \to e^{kt}=e^{x}$$

$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{df(t)}{dx}.\frac{dx}{dt} \to \frac{de^{kt}}{dt}=\frac{de^{kt}}{dx}.\frac{dx}{dt}=\underbrace{\frac{de^{x}}{dx}}_{e^x}.\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{k}=ke^{kt}$$

۲) $f(t)=\sin(kt)$

با استفاده از تغییر متغیر و رابطه مشتق زنجیره ای داریم:

$$x=kt \to \sin(kt)=\sin(x)$$

$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{df(t)}{dx}.\frac{dx}{dt} \to \frac{d\sin(kt)}{dt}=\frac{d\sin(kt)}{dx}.\frac{dx}{dt}=\underbrace{\frac{d\sin(x)}{dx}}_{\cos(x)}.\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{k}=k\cos(kt)$$

۳) $f(t)=\dfrac{2\cos(t)-1}{\cos(t)+3}$

با استفاده از خصوصیات ۱، ۲ و ۵ جدول ۱-۱ و ردیف های ۴ و ۵ جدول ۱-۲ داریم:

$$f'(t)=\frac{\left(2\cos(t)-1\right)'\left(\cos(t)+3\right)-\left(\cos(t)+3\right)'\left(2\cos(t)-1\right)}{\left(\cos(t)+3\right)^2}$$

$$\begin{cases}\left(2\cos(t)-1\right)'=-2\sin(t)-0\\ \left(\cos(t)+3\right)'=-\sin(t)+0\end{cases}$$

$$f'(t)=\frac{\left(-2\sin(t)\right)\left(\cos(t)+3\right)-\left(-\sin(t)\right)\left(2\cos(t)-1\right)}{\left(\cos(t)+3\right)^2}$$

$$=\frac{\left(-2\sin(t)\cos(t)-6\sin(t)\right)-\left(-2\sin(t)\cos(t)+\sin(t)\right)}{\left(\cos(t)+3\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\cancel{-2\sin(t)\cos(t)}-6\sin(t)+\cancel{2\sin(t)\cos(t)}-\sin(t)\right)}{\left(\cos(t)+3\right)^2}$$

$$=\frac{-7\sin(t)}{\left(\cos(t)+3\right)^2}$$

◄ نکته مهم:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{kt}\right)=ke^{kt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sin(kt)\right)=k\cos(kt)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\cos(kt)\right)=-k\sin(kt)$$

مثال ۱-۴

مشتق توابع زیر را نسبت به متغیر t محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=e^{3t}\sin(4t)$

با استفاده از خصوصیت ۴ جدول ۱-۱ و نکته فوق داریم:

$$\frac{d\left(e^{3t}\sin(4t)\right)}{dt}=\frac{d\left(e^{3t}\right)}{dt}\sin(4t)+\frac{d\left(\sin(4t)\right)}{dt}e^{3t}$$

$$=3e^{3t}\sin(4t)+4e^{3t}\cos(4t)=e^{3t}\left(3\sin(4t)+4\cos(4t)\right)$$

۲) $f(t)=t+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{0\times t-1\times 1}{t^2}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\right)=\frac{0\times t^2-2t\times 1}{t^4}=\frac{-2t\times 1}{t^4}=-\frac{2}{t^3}\end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)=1-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}$$

۳) $f(t)=\sqrt{t}$

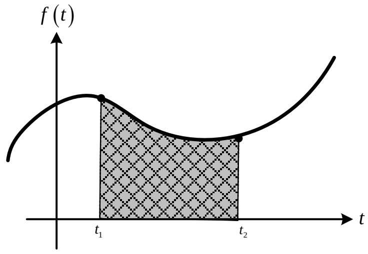
$$f'(t)=\left(\sqrt{t}\right)'=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

◄ نکته: اگر تابع $f(t)$ مشتق پذیر باشد، $f'(t)$ را مشتق مرتبه اول و $f''(t)$ را مشتق مرتبه دوم آن گویند. در حالت کلی مشتق مرتبه n ام تابع را با $f^{(n)}(t)$ نمایش داده و داریم:

$$f'(t)=\frac{df(t)}{dt}$$
$$f''(t)=\frac{d^2f(t)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(t)=\frac{d^nf(t)}{dt^n}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right)=\ldots$$

۱-۵- انتگرال گیری:

انتگرال تابع $f(t)$ به معنای سطح زیر نمودار می باشد. انتگرال به دو صورت معین و نامعین تعریف می گردد. در صورتیکه حدود محاسبه سطح زیر نمودار مشخص باشد انتگرال معین و در غیراینصورت نامعین می باشد. انتگرال نامعین تابع $f(t)$ نسبت به متغیر t با نماد $\int f(t)dt$ نمایش داده می شود. انتگرال نامعین تابع $f(t)$ نسبت به متغیر t در بازه $[t_1,t_2]$ با نماد $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ نمایش داده می شود.



شکل ۱-۵: مفهوم انتگرال معین $f(t)$ در بازه $[t_1,t_2]$

نکته: اگر در محاسبه انتگرال گیری از مساحت زیر نمودار استفاده می شود، باید به این نکته توجه شود که در جمع مساحت ها بخشهایی از مساحت که زیر محور افقی قرار دارند، با علامت منفی در محاسبات حاضر می شوند.

جداول زیر به ترتیب خصوصیات انتگرال و زوج توابع انتگرال گیری را نمایش می دهد:

جدول ۱-۳: مشخصات انتگرال گیری

ردیف	خصوصیت	رابطه مربوطه
۱.	ضریب ثابت در انتگرال	$\int k\,f(t)dt=k\int f(t)dt$
۲.	جمع/تفاضل توابع	$\int f(t)\pm g(t)dt=\int f(t)dt\pm\int g(t)dt$
۳.	انتگرال جزء به جزء	$\int f(t)dg(t)=f(t)g(t)-\int g(t)df(t)$
۴.	جابجایی حدود انتگرال گیری	$\int_a^b f(t)dt=-\int_b^a f(t)dt$
۵.		$\int f(t)dt=F(t)\rightarrow\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$
۶.		$\int_a^b f(t)dt\overset{a<c<b}{=}\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$
۷.		$\left\lvert\int_a^b f(t)dt\right\rvert\le\int_a^b\lvert f(t)\rvert dt$

جدول ۱-۴: انتگرال توابع معروف

ردیف	رابطه مربوطه
.۱	$\int t^n\,dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + C$
.۲	$\int k\,dt = kt + C$
.۳	$\int \frac{1}{t}dt = \ln\lvert t\rvert + C$
.۴	$\int e^t\,dt = e^t + C$
.۵	$\int \sin(t)\,dt = -\cos(t) + C$
.۶	$\int \cos(t)\,dt = \sin(t) + C$
.۷	$\int \tan(t)\,dt = -\ln\lvert\cos(t)\rvert + C$
.۸	$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \tan^{-1}(t) + C$
.۹	$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \sin^{-1}(t) + C$
.۱۰	$\int \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \sqrt{1-t^2} + C$

نکته مهم:

$$\int e^{kt}dt = \frac{1}{k}e^{kt} + C$$

$$\int \sin(kt)\,dt = -\frac{1}{k}\cos(kt) + C$$

$$\frac{d}{dt}\left(\cos(kt)\right) = \frac{1}{k}\sin(kt) + C$$

مثال ۱-۵

انتگرال تابع زیر را نسبت به متغیر t محاسبه نمایید:

$$f(t) = e^{3t} + \sin(4t)$$

با استفاده از خصوصیت ۴ جدول ۱-۱ و نکته فوق داریم:

$$\int\left(e^{3t} + \sin(4t)\right)dt = \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{4}\cos(4t) + C$$

۱-۵-۱- روشهای انتگرال گیری:

برای انتگرال گیری از توابعی که مستقیماً در جدول ۱-۴ نمی گنجند، از روش های مختلفی استفاده می کنیم. معمول ترین این روش ها به شرح زیر است:

الف) انتگرال گیری به روش تغییر متغیر

ب) انتگرال گیری به روش جز به جز

ج) انتگرال گیری به روش پروانه ای

با ارائه چند مثال این چند روش را مرور خواهیم نمود:

الف) انتگرال گیری به روش تغییر متغیر:

برای انتگرال گیری به روش تغییر متغیر، ابتدا متغیر جدیدی را به گونه ای تعریف می کنیم که انتگرال گیری به کمک آن آسان تر گردد. از این روش معمولاً زمانی استفاده می شود که تابع به همراه مشتق خود در زیر انتگرال ظاهر گردد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱-۶

انتگرال های زیر را محاسبه نمایید:

۱) $\int \frac{\sin(\ln(t))}{t}dt$

با تعریف متغیر جدید $x=\ln(t)$ داریم:

$$x=\ln(t)\rightarrow dx=\frac{1}{t}dt$$

$$\rightarrow \int \frac{\sin(\ln(t))}{t}dt=\int \sin\left(\underbrace{\ln(t)}_{x}\right)\underbrace{\frac{1}{t}dt}_{dx}=\int \sin(x)\,dx=-\cos(x)+C=-\cos(\ln(t))+C$$

۲) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$

با تعریف متغیر جدید $t=\sin(x)$ داریم:

$$t=\sin(x)\rightarrow dt=\cos(x)dx\rightarrow \begin{cases} t=1\rightarrow x=\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2} \\ t=0\rightarrow x=\sin^{-1}(0)=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\underbrace{1-\sin^2(x)}_{\cos^2(x)}}\cos(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2(x)}\cos(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2x))\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)-0-\frac{1}{2}\sin(0)\right)=\frac{\pi}{4}$$

ب) انتگرال گیری به روش جزء به جزء:

از این روش معمولاً زمانی استفاده می شود که زیر انتگرال ضرب دو تابع داشته باشیم:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \qquad (۱۵-۱)$$

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱-۷

انتگرال های زیر را محاسبه نمایید:

۱) $\int t\sin(t)\,dt$

ابتدا توابع u و v را مشخص می کنیم:

$$\begin{cases} u=t\rightarrow du=dt \\ \sin(t)dt=dv\rightarrow v=\int\sin(t)dt=-\cos(t)\end{cases}$$

$$\rightarrow\int t\sin(t)dt=\underbrace{t}_{u}\left(\underbrace{-\cos(t)}_{v}\right)-\int\left(\underbrace{-\cos(t)}_{v}\right)\underbrace{dt}_{du}=-t\cos(t)+\sin(t)+C$$

۲) $\int e^t\sin(t)dt$

ابتدا توابع u و v را مشخص می کنیم:

$$\begin{cases} u=e^t\rightarrow du=e^tdt \\ \sin(t)dt=dv\rightarrow v=\int\sin(t)dt=-\cos(t)\end{cases}$$

$$\int e^t\sin(t)dt=\underbrace{e^t}_{u}\left(\underbrace{-\cos(t)}_{v}\right)-\int\left(\underbrace{-\cos(t)}_{v}\right)\underbrace{e^tdt}_{du}=-\cos(t)e^t+\int e^t\cos(t)dt$$

اکنون بار دیگر از روش جزء به جزء استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} u=e^t\rightarrow du=e^tdt \\ \cos(t)dt=dv\rightarrow v=\int\cos(t)dt=\sin(t)\end{cases}$$

$$\rightarrow\int e^t\sin(t)dt=-\cos(t)e^t+\underbrace{e^t}_{u}\left(\underbrace{\sin(t)}_{v}\right)-\int\left(\underbrace{\sin(t)}_{v}\right)\underbrace{e^tdt}_{du}$$

$$=-\cos(t)e^t+\sin(t)e^t-\int e^t\sin(t)dt$$

$$\int e^t\sin(t)dt=I$$

$$\rightarrow I=-\cos(t)e^t+\sin(t)e^t-I\rightarrow 2I=-\cos(t)e^t+\sin(t)e^t\rightarrow I=\frac{1}{2}\left(-\cos(t)e^t+\sin(t)e^t\right)$$

$$\rightarrow I=\int e^t\sin(t)dt=\frac{1}{2}e^t\left(\sin(t)-\cos(t)\right)$$

ج) انتگرال گیری به روش پروانه ای:

این روش که حالت خاصی از روش جزء به جزء است زمانی استفاده می شود که از دو تابعی که در زیر انتگرال ضرب می‌شوند، یکی تابع چند جمله ای[1] باشد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱-۸

انتگرال های زیر را محاسبه نمایید:

۱) $\int t\sin(t)dt$

در این مثال تابع یک تابع t چند جمله ای می باشد.

[1] توابعی به فرم $f(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$ را توابع چند جمله ای گویند. بطور مثال توابع $f(t)=t^3-3t+5$، $f(t)=3t^4-4$ و حتی توابع ثابتی مثل $f(t)=2$ همگی چند جمله ای هستند.

مشتق	انتگرال
t +	$\sin(t)$
1 −	$-\cos(t)$
0	$-\sin(t)$

$$\to \int t\sin(t)\,dt = -t\cos(t)+\sin(t)+C$$

۲) $\int t^3 e^{-2t}dt$

در این مثال تابع t^3 یک تابع چند جمله ای می باشد.

مشتق	انتگرال
t^3 +	e^{-2t}
$3t^2$ −	$\frac{-1}{2}e^{-2t}$
$6t$ +	$\frac{1}{4}e^{-2t}$
6 −	$\frac{-1}{8}e^{-2t}$
0	$\frac{1}{16}e^{-2t}$

$$\to \int t^3 e^{-2t}dt = t^3\left(\frac{-1}{2}e^{-2t}\right)-3t^2\left(\frac{1}{4}e^{-2t}\right)+6t\left(\frac{-1}{8}e^{-2t}\right)-6\left(\frac{1}{16}e^{-2t}\right)$$
$$=\frac{-1}{2}t^3e^{-2t}-\frac{3}{4}t^2e^{-2t}+\frac{-6}{8}te^{-2t}-\frac{6}{16}e^{-2t}$$
$$=e^{-2t}\left(\frac{-1}{2}t^3-\frac{3}{4}t^2+\frac{-3}{4}t-\frac{3}{8}\right)$$

۱-۶- تجزیه کسر به کسرهای جزئی:

برای تابع $f(t)$ که درجه مخرج آن حداقل یکی از صورت آن بیشتر است، برای تجزیه کسر، ابتدا به تعداد ریشه های مخرج آن کسر تولید می کنیم. ضرایب مربوط به کسرهایی که شامل ریشه های ساده مخرج می باشند، بصورت

$$A_i = \lim_{t\to t_0}(t-t_0)\,f(t) \qquad (۱-۱۶)$$

محاسبه می گردند. همچنین هر ریشه مکرر از مرتبه k، به k کسر مجزا تجزیه می گردد. ضرایب مربوط به کسر j ام که دارای مخرج $(t-t_0)^j$ می باشد بدین صورت محاسبه می شود:

$$A_j = \frac{1}{(k-j)!}\lim_{t\to t_0}\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}\left((t-t_0)^k f(t)\right) \qquad (۱-۱۷)$$

نکته مهم: اگر درجه صورت $f(t)$ از مخرج آن بیشتر و یا حتی مساوی آن بود، برای تجزیه کسر ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می نماییم.

برای درک بهتر این مبحث به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۱-۹

توابع کسری زیر را به کسرهای جزئی تقسیم نمایید:

۱) $f(t)=\frac{2(t+6)}{t^2+5t+6}$

مخرج این کسر درجه ۲ می باشد، بنابراین برای تجزیه آن دو کسر مجزا باید ایجاد شود:

$$f(t)=\frac{2(t+6)}{t^2+5t+6}=\frac{2(t+6)}{(t+2)(t+3)}=\frac{A_1}{(t+2)}+\frac{A_2}{(t+3)}$$

ریشه های این کسر هر دو ریشه های ساده هستند بنابراین طبق رابطه ۱-۱۶ داریم:

$$A_1=\lim_{t\to-2}(t+2)f(t)=\lim_{t\to-2}\cancel{(t+2)}\frac{2(t+6)}{\cancel{(t+2)}(t+3)}=\lim_{t\to-2}\frac{2(t+6)}{(t+3)}=8$$

$$A_2=\lim_{t\to-3}(t+3)f(t)=\lim_{t\to-3}\cancel{(t+3)}\frac{2(t+6)}{\cancel{(t+3)}(t+2)}=\lim_{t\to-3}\frac{2(t+6)}{(t+2)}=-6$$

$$\to f(t)=\frac{8}{(t+2)}-\frac{6}{(t+3)}$$

۲) $f(t)=\dfrac{t^3+5t^2+9t+7}{t^2+3t+2}$

مخرج این کسر درجه ۲ می باشد، بنابراین برای تجزیه آن دو کسر مجزا باید ایجاد شود. اما از آنجا که درجه صورت از مخرج بیشتر است ابتدا باید صورت کسر را به مخرج آن تقسیم نماییم:

$$\begin{array}{l|l} t^3+5t^2+9t+7 & t^2+3t+2 \\ \hline -\left(t^3+3t^2+2t\right) & t+2 \\ \quad 2t^2+7t+7 & \\ \quad -\left(2t^2+6t+4\right) & \\ \qquad t+3 & \end{array}$$

$$f(t)=\frac{t^3+5t^2+9t+7}{t^2+3t+2}=t+2+\frac{t+3}{t^2+3t+2}=t+2+\underbrace{\frac{t+3}{(t+1)(t+2)}}_{g(t)}=t+2+\frac{A_1}{(t+1)}+\frac{A_2}{(t+2)}$$

ریشه های $g(t)$ هر دو ریشه های ساده هستند بنابراین طبق رابطه ۱-۱۶ داریم:

$$A_1=\lim_{t\to-1}(t+1)g(t)=\lim_{t\to-1}\cancel{(t+1)}\frac{t+3}{\cancel{(t+1)}(t+2)}=\lim_{t\to-1}\frac{t+3}{(t+2)}=2$$

$$A_2=\lim_{t\to-2}(t+2)g(t)=\lim_{t\to-2}\cancel{(t+1)}\frac{t+3}{\cancel{(t+2)}(t+1)}=\lim_{t\to-2}\frac{t+3}{(t+1)}=-1$$

$$\to f(t)=t+2+\frac{2}{(t+1)}-\frac{1}{(t+2)}$$

۲) $f(t)=\dfrac{t^3+2t^2+t+3}{t(t+1)^2}$

مخرج این کسر درجه ۳ می باشد، بنابراین برای تجزیه آن سه کسر مجزا باید ایجاد شود. اما از آنجا که درجه صورت و مخرج آن برابر است ابتدا باید صورت کسر را به مخرج آن تقسیم نماییم:

$$\begin{array}{l|l} t^3+2t^2+t+3 & t^3+2t^2+t \\ \hline -\left(t^3+2t^2+t\right) & 1 \\ \qquad\qquad 3 & \end{array}$$

$$f(t)=\frac{t^3+2t^2+t+3}{t(t+1)^2}=1+\underbrace{\frac{3}{t(t+1)^2}}_{g(t)}=1+\frac{A_1}{t}+\frac{A_{21}}{(t+1)}+\frac{A_{22}}{(t+1)^2}$$

$g(t)$ دارای یک ریشه ساده در $t=0$ و یک ریشه مضاعف در $t=-1$ می باشد. بنابراین طبق روابط ۱-۱۶ و ۱-۱۷ داریم:

$$g(t)=\frac{A_1}{t}+\underbrace{\frac{A_{21}}{(t+1)}}_{\substack{k=2\\ j=1}}+\underbrace{\frac{A_{22}}{(t+1)^2}}_{\substack{k=2\\ j=2}}$$

$$A_1=\lim_{t\to 0}(t)g(t)=\lim_{t\to 0}\cancel{(t)}\frac{3}{\cancel{(t)}(t+1)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{3}{(t+1)^2}=3$$

$$A_{21}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{t\to -1}\frac{d^{2-1}}{dt^{2-1}}\left((t+1)^2g(t)\right)=\lim_{t\to -1}\frac{d}{dt}\left(\cancel{(t+1)^2}\frac{3}{t\cancel{(t+1)^2}}\right)=\lim_{t\to -1}\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{t}\right)=\lim_{t\to -1}\left(\frac{-3}{t^2}\right)=-3$$

$$A_{22}=\frac{1}{\underbrace{(2-2)!}_{0!=1}}\lim_{t\to -1}\frac{d^{2-2}}{dt^{2-2}}\left((t+1)^2g(t)\right)=\lim_{t\to -1}\left(\cancel{(t+1)^2}\frac{3}{t\cancel{(t+1)^2}}\right)=\lim_{t\to -1}\left(\frac{3}{t}\right)=-3$$

$$f(t)=\frac{t^3+2t^2+t+3}{t(t+1)^2}=1+\frac{3}{t}-\frac{3}{(t+1)}-\frac{3}{(t+1)^2}$$

۱-۷- رفع ابهام توابع در محاسبه حد:

اگر حد تابعی به یکی از صورت های $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$ و یا $\infty\times 0$ باشد، به این سه حالت پیش آمده ابهام گوییم. در این حالت برای محاسبه حد تابع نیاز به رفع ابهام داریم. در این جزوه تنها به مرور دو مورد اول می پردازیم:

۱-۷-۱- قاعده هوپیتال:

اگر داشته باشیم:

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام با استفاده از قاعده هوپیتال بصورت زیر عمل می کنیم:

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right) \tag{۱-۱۸}$$

۱-۷-۲- حد توابع کسری چند جمله ای در بینهایت:

اگر تابع کسری چند جمله ای با شرایط

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{b_mt^m+b_{m-1}t^{m-1}+\ldots+b_1t+b_0}{a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$

داشته باشیم برای رفع ابهام با توجه به درجه صورت و مخرج (به ترتیب m و n) از قاعده زیرا استفاده می کنیم:

$$\lim_{t\to t_0}\left(\frac{b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1}+\ldots+b_1 t+b_0}{a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1 t+a_0}\right)=\begin{cases}0 & n>m\\ \dfrac{b_m}{a_n} & n=m\\ \infty & n<m\end{cases} \qquad (۱-۱۹)$$

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱-۱۰

حدود زیر را محاسبه نمایید:

۱) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{3t^2-12}{2t^3+5t-26}$

$$\lim_{t\to 2}\frac{3t^2-12}{2t^3+5t-26}=\frac{0}{0}$$

بنابراین طبق رابطه ۱-۱۸ داریم:

$$\lim_{t\to 2}\frac{3t^2-12}{2t^3+5t-26}=\lim_{t\to 2}\frac{\left(3t^2-12\right)'}{\left(2t^3+5t-26\right)'}=\lim_{t\to 2}\frac{6t}{6t+5}=\frac{12}{17}$$

۲) $\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{3t^2-12}{2t^3+5t-26}$

درجه صورت این کسر از مخرج آن کمتر است بنابراین حد آن در بینهایت طبق رابطه ۱-۱۹ برابر صفر خواهد بود.

۳) $\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{4t^4+5t^2}{2t^3+5t-26}$

درجه صورت این کسر از مخرج آن بیشتر است بنابراین حد آن در بینهایت طبق رابطه ۱-۱۹ برابر بینهایت خواهد بود.

۴) $\lim\limits_{t\to \infty}\dfrac{4t^3-t^2+7t+2}{-t^3+5t-26}$

درجه صورت این کسر با مخرج آن برابر است بنابراین حد آن در بینهایت طبق رابطه ۱-۱۹ برابر

$$\lim_{t\to \infty}\frac{4t^3-t^2+7t+2}{-t^3+5t-26}=\frac{4}{-1}=-4$$

خواهد بود.

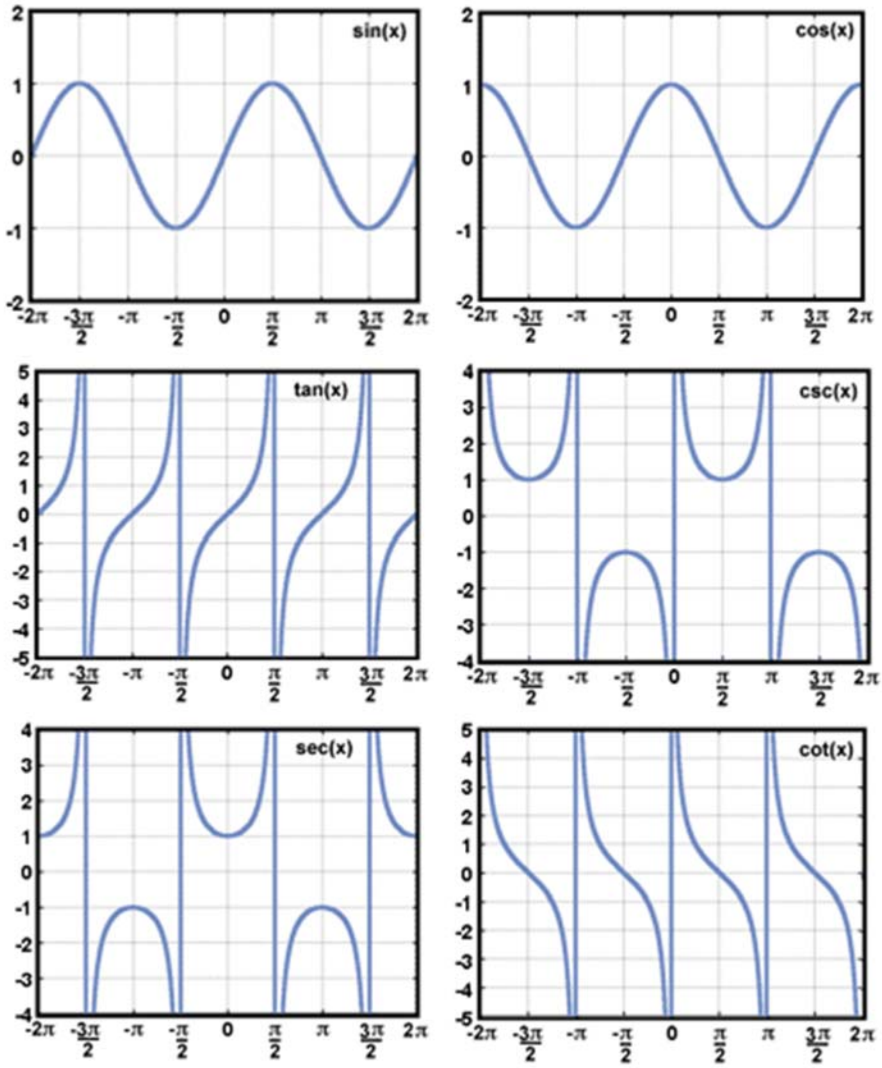
۱-۸- توابع متناوب:

اگر تابع $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، داریم:

$$f(t)=f(t+T) \qquad (۱-۲۰)$$

همانطور که از رابطه ۱-۲۰ هم پیداست تابع متناوب در فواصل زمانی یکسان (T) تکرار خواهد شد.

بطور مثال توابع زیر همگی متناوب هستند:



شکل۱-۶: چند مثال از توابع متناوب

۱-۹- توابع زوج و فرد:

۱-۹-۱- تابع زوج:

اگر تابع $f(t)$ در رابطه زیر صدق کند، این تابع را تابع زوج گوییم:

$$f(t)=f(-t) \tag{۱-۲۱}$$

نکات مهم:

۱- توابع زوج نسبت به محور عمودی متقارن می باشند.

۲- دامنه توابع زوج حتما باید نسبت به مبدا متقارن باشد.

۳- برای تمام توابع زوج انتگرال گیری روی بازه متقارن از قانون زیر تبعیت می کند:

$$\int_{-t_0}^{t_0} f(t)\,dt=2\int_{0}^{t_0} f(t)\,dt$$

بطور مثال تابع $\cos(t)$ یک تابع زوج است و داریم: $\cos(t)=\cos(-t)$

۱-۹-۲- تابع فرد:

اگر تابع $f(t)$ در رابطه زیر صدق کند، این تابع را تابع فرد گوییم:

$$f(t)=-f(-t) \qquad (۱-۲۲)$$

نکات مهم:

۴- توابع فرد نسبت به مبدأ متقارن می باشند.

۵- دامنه توابع فرد حتما باید نسبت به مبدا متقارن باشد.

۶- برای تمام توابع فرد انتگرال گیری روی بازه متقارن از قانون زیر تبعیت می کند:

$$\int_{-t_0}^{t_0} f(t)\,dt=0$$

بطور مثال تابع $\sin(t)$ یک تابع فرد است و داریم: $\sin(t)=-\sin(-t)$

تابعی که در هیچکدام از روابط ۱-۲۰ و ۱-۲۱ صدق نکند را نه زوج و نه فرد می نامند.

مثال ۱-۱۱:

زوج و فرد بودن توابع زیر را بررسی نمایید:

۱) $f(t)=t^3\sin(t)+t^4\cos(t)+|t|+5$

برای بررسی زوج/فرد بودن تابع روابط ۱-۲۰ و ۱-۲۱ را بررسی می کنیم:

$$f(-t)=(-t)^3\sin(-t)+(-t)^4\cos(-t)+|(-t)|+5=(-t^3)(-\sin(t))+t^4\cos(t)+|t|+5$$
$$=t^3\sin(t)+t^4\cos(t)+|t|+5=f(t)$$

بنابراین تابع زوج است.

۲) $f(t)=\sin^3(t)-3t^5+\tan(t)$

$$f(-t)=\sin^3(-t)-3(-t)^5+\tan(-t)=(\sin(-t))^3-3(-t^5)+\frac{\sin(-t)}{\cos(-t)}$$
$$=(-\sin(t))^3-3(-t^5)+\frac{-\sin(t)}{\cos(t)}=-\sin^3(t)+3(t^5)-\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$
$$=-\sin^3(t)+3(t^5)-\tan(t)\neq f(t)$$

زوج نیست اکنون فرد بودن تابع را بررسی می کنیم:

$$-f(-t)=-(-\sin^3(t)+3(t^5)-\tan(t))=\sin^3(t)-3(t^5)+\tan(t)=f(t)$$

نتیجه: تابع $\tan(t)$ فرد است و داریم: $\tan(t)=\tan(-t)$

۳) $f(t)=\dfrac{\tan^3(t)}{t^3-1}$

$$f(-t)=\frac{\tan^3(-t)}{(-t)^3-1}=\frac{(\tan(-t))^3}{(-t)^3-1}=\frac{(-\tan(t))^3}{-t^3-1}=\frac{\cancel{-}\tan^3(t)}{\cancel{-}(t^3+1)}=\frac{\tan^3(t)}{t^3+1}\neq f(t)$$

زوج نیست اکنون فرد بودن تابع را بررسی می کنیم:

$$-f\left(-t\right)=-\frac{\tan^{3}\left(t\right)}{t^{3}+1}\neq f\left(t\right)$$

فرد نیست بنابراین نه زوج است و نه فرد .

نکته:

تابع فرد × تابع فرد = تابع زوج

تابع فرد× تابع زوج = تابع فرد

تابع زوج× تابع زوج = تابع زوج

بخش دوم :

سری فوریه، انتگرال فوریه،

تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس

بخش دوم: سری فوریه، انتگرال فوریه، تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس

۲-۱- سری فوریه:

هر تابع متناوبی را می توان با یک سری شامل مجموعه ای از جملات سینوسی و کسینوسی و اعداد ثابت بیان نمود. هنگامی که تابعی به این فرم بیان گردد، تحلیل آن در حوزه فرکانسی نیز راحت تر خواهد بود. در اکثر کاربردهای سری فوریه، تحلیل فرکانسی توابع اهمیت فراوانی دارد. همچنین در دروسی مانند مدارهای الکتریکی با بیان منبع ورودی غیرخطی (مثل پالس مربعی) بر حسب توابع سینوسی و ثابت و با کمک قضیه جمع آثار می توان مدار را راحت تر تحلیل نمود.

اگر تابع $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، سری فوریه معادل آن عبارتست از:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right) \qquad (۲-۱)$$

که در آن:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(t)dt \qquad (۲-۲)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \qquad (۲-۳)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \qquad (۲-۴)$$

می باشد.

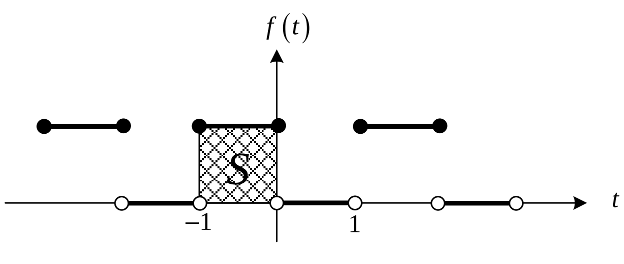
نکته: ضریب ثابت سری فوریه همان مساحت زیر نمودار تابع $f(t)$ در یک دوره تناوب است.

مثال ۲-۱

سری فوریه توابع $f(t)$ را محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=\begin{cases}1 & -1\le t\le 0\\ 0 & 0<t<1\end{cases},\ T=2, t\in(-1,1)$

برای محاسبه سری فوریه ابتدا باید ضرایب آن را جداگانه محاسبه نماییم:



$$a_0=\frac{1}{T}S=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int_{-1}^{0}(1)\cos\left(\frac{\cancel{2}\pi n}{\cancel{2}}t\right)dt=\int_{-1}^{0}\cos(n\pi t)dt$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{n\pi}\left(0-\sin(-n\pi)\right)=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int_{-1}^{0}(1)\sin\left(\frac{\cancel{2}\pi n}{\cancel{2}}t\right)dt=\int_{-1}^{0}\sin(n\pi t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{n\pi}\left(\underbrace{\cos(0)}_{=1}-\underbrace{\cos(-n\pi)}_{\cos(n\pi)}\right)=\frac{1}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

$$=\begin{cases}0 & n\ \text{زوج}\\ \dfrac{1}{n\pi}(-1-1)=\dfrac{-2}{n\pi} & n\ \text{فرد}\end{cases}$$

نکته: اگر a_n یا b_n تنها به ازای مقادیر زوج/فرد n مقدار داشته باشند در نوشتن سری فوریه معادل برای n زوج $2n$ و برای n فرد $2n-1$ قرار می دهیم.

بنابراین سری فوریه تابع $f(t)$ در بازه $t\in(-1,1)$ طبق رابطه ۲-۱ برابر است با:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{0\times\cos\left(\frac{\cancel{2}\pi n}{\cancel{2}}t\right)}_{=0}+\left(\frac{-2}{(2n-1)\pi}\right)\sin\left(\frac{\cancel{2}\pi n}{\cancel{2}}t\right)\right)=1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)}\sin\left((2n-1)\pi t\right)\right)$$

تنها برای مقادیر فرد باید مقدار داشته باشد. b_n

$$\rightarrow \boxed{f(t)=1-\frac{2}{\pi}\sin(\pi t)-\frac{2}{3\pi}\sin(3\pi t)-\frac{2}{5\pi}\sin(5\pi t)-\dots}$$

۲) $f(t)=1+t,\ T=2\pi, t\in(-\pi,\pi)$

برای محاسبه سری فوریه ابتدا باید ضرایب آن را جداگانه محاسبه نماییم:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\left(\pi+\cancel{\frac{\pi^2}{2}}\right)-\left(-\pi+\cancel{\frac{(-\pi)^2}{2}}\right)\right)=\frac{1}{2\pi}(2\pi)=1$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+t)\cos\left(\frac{\cancel{2\pi}n}{\cancel{2\pi}}t\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+t)\cos(nt)\,dt$$

برای محاسبه a_n از روش پروانه ای استفاده می کنیم:

مشتق		انتگرال
$1+t$	$+$	$\cos(nt)$
$0+1$	$-$	$\frac{1}{n}\sin(nt)$
0		$-\frac{1}{n^2}\cos(nt)$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(1+t)\sin(nt)+\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right)_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{1}{n}(1+\pi)\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}+\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)\right)-\left(\frac{1}{n}(1-\pi)\underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0}+\frac{1}{n^2}\underbrace{\cos(-n\pi)}_{=\cos(n\pi)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+t)\sin\left(\frac{\cancel{2\pi} n}{\cancel{2\pi}}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+t)\sin(nt)\,dt
$$

برای محاسبه b_n نیز از روش پروانه ای استفاده می کنیم:

مشتق		انتگرال
$1+t$	$+$	$\sin(nt)$
$0+1$	$-$	$-\frac{1}{n}\cos(nt)$
0		$-\frac{1}{n^2}\sin(nt)$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(1+t)\cos(nt)+\frac{1}{n^2}\sin(nt)\right)_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{1}{n}(1+\pi)\cos(n\pi)+\frac{1}{n^2}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\right)-\left(-\frac{1}{n}(1-\pi)\underbrace{\cos(-n\pi)}_{\cos(n\pi)}+\frac{1}{n^2}\underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(1+\pi)\cos(n\pi)-\left(-\frac{1}{n}\right)(1-\pi)\cos(n\pi)\right) = -\frac{1}{n\pi}\big((1+\pi)\cos(n\pi)-(1-\pi)\cos(n\pi)\big) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(\cancel{\cos(n\pi)}+\pi\cos(n\pi)-\cancel{\cos(n\pi)}+\pi\cos(n\pi)\right) = -\frac{1}{n\cancel{\pi}}\left(2\cancel{\pi}\cos(n\pi)\right)=\frac{-2}{n}\cos(n\pi)
\end{aligned}
$$

نکته: اگر n یک عدد صحیح/طبیعی باشد داریم:

$$\cos(n\pi)=(-1)^n$$
$$\sin(n\pi)=0$$

بنابراین سری فوریه تابع $f(t)$ در بازه $t\in(-\pi,\pi)$ طبق رابطه ۲-۱ برابر است با:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right) \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{0\times\cos\left(\frac{\cancel{2\pi} n}{\cancel{2\pi}}t\right)}_{=0}+\left(\frac{-2}{n}\cos(n\pi)\right)\sin\left(\frac{\cancel{2\pi} n}{\cancel{2\pi}}t\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\underbrace{\frac{-2}{n}(-1)^n}_{-(-1)^n=(-1)^{n+1}}\right)\sin(nt)\right)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)\right)$$

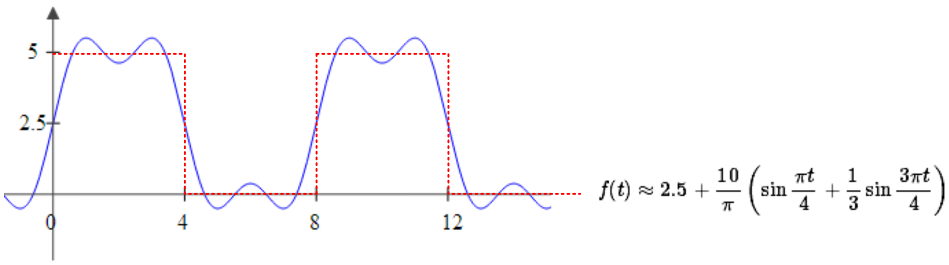
توجه کنید که برای ساده سازی بخش $-(-1)^n=(-1)^{n+1}$ از قاعده زیر استفاده شده است:

$$a^x.a^y=a^{x+y}\rightarrow -(-1)^n=(-1)^1(-1)^n=(-1)^{n+1}$$

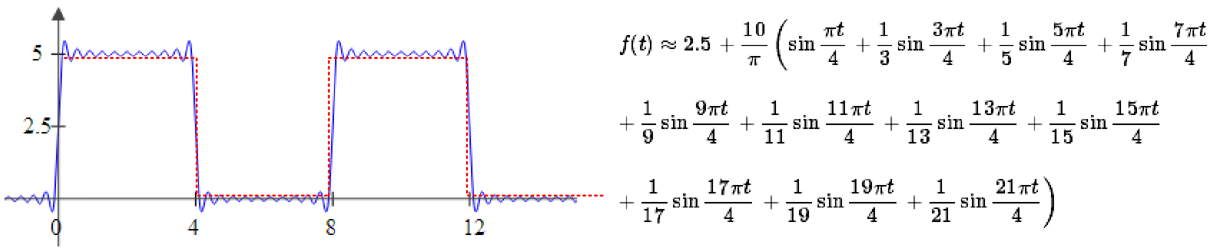
بنابراین:

$$\rightarrow \boxed{f(t)=1+2\sin(t)-\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t)-....}$$

سری فوریه زمانی دقیقاً با تابع برابر است که تعداد جملات سری بینهایت باشد، اما اینکار در عمل غیر ممکن می باشد بنابراین برای استفاده از سری فوریه معادل تابع معمولا یک تعداد محدود جمله ($\sum_{n=1}^{N}$) در نظر می گیرند. بدیهیست که این تقریب خطای اندکی نیز در پی خواهد داشت. به شکل زیر توجه کنید:



شکل ۲-۱-الف: سری فوریه یک موج مربعی الف با $n=3$



شکل ۲-۱-ب: سری فوریه یک موج مربعی الف با $n=12$

همانطور که از مثال فوق پیداست، محاسبه سری فوریه توابع مستلزم محاسبات زمان بر و پیچیده ایست. بنابراین اگر تابع $f(t)$ شرایط خاصی داشته باشد، تا جای ممکن به ساده سازی محاسبات ضرایب سری فوریه می پردازیم. با استفاده از نکاتی که در بخش قبل در خصوص توابع زوج و فرد خواندیم، بار دیگر به محاسبات ضرایب سری فوریه توابع زوج و فرد می پردازیم:

۲-۱-۱- سری فوریه توابع زوج:

اگر $f(t)$ یک تابع زوج باشد، سری فوریه و ضرایب معادل آن بصورت زیر محاسبه می گردند:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \qquad (۲-۵)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\underbrace{f(t)}_{\text{زوج}}\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}_{\text{زوج}}dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \tag{۶-۲}$$

زوج ×زوج= زوج

$$b_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\underbrace{f(t)}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}_{\text{فرد}}dt=0 \tag{۷-۲}$$

فرد ×زوج= فرد

بنابراین:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \tag{۸-۲}$$

۲-۱-۲- سری فوریه توابع فرد:

اگر $f(t)$ یک تابع فرد باشد، سری فوریه و ضرایب معادل آن بصورت زیر محاسبه می گردند:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt=0 \tag{۹-۲}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\underbrace{f(t)}_{\text{فرد}}\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}_{\text{زوج}}dt=0 \tag{۱۰-۲}$$

زوج ×فرد= زوج

$$b_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\underbrace{f(t)}_{\text{فرد}}\underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}_{\text{فرد}}dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \tag{۱۱-۲}$$

فرد ×فرد= زوج

بنابراین:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \tag{۱۲-۲}$$

به مثال های زیر توجه نمایید:

مثال ۲-۲

سری فوریه تابع $f(t)$ را محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=t^2\,,\ T=2,\ t\in(-1,1)$

ابتدا زوج و فرد بودن تابع را مشخص می نماییم:

$$f(-t)=(-t)^2=t^2=f(t)$$

تابع زوج است بنابراین تنها باید ضرایب a_0 و a_n را محاسبه کنیم.

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt=\frac{2}{2}\int_0^1 t^2\,dt=\left(\frac{t^3}{3}\right)_0^1=\frac{1^3}{3}-0=\frac{1}{3}$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{4}{2}\int_0^1 t^2\cos\left(\frac{\cancel{2}\pi n}{\cancel{2}}t\right)dt=2\int_0^1 t^2\cos(n\pi t)\,dt$$

برای محاسبه a_n از روش پروانه ای استفاده می کنیم:

مشتق		انتگرال
t^2	$+$	$\cos(n\pi t)$
$2t$	$-$	$\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)$
2	$+$	$-\frac{1}{(n\pi)^2}\cos(n\pi t)$
0		$-\frac{1}{(n\pi)^3}\sin(n\pi t)$

$$a_n=2\int_0^1 t^2\cos(n\pi t)\,dt=2\left(t^2\left(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right)-2t\left(-\frac{1}{(n\pi)^2}\cos(n\pi t)\right)+2\left(-\frac{1}{(n\pi)^3}\sin(n\pi t)\right)\right)_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{n\pi}t^2\sin(n\pi t)+\frac{2}{(n\pi)^2}t\cos(n\pi t)-\frac{2}{(n\pi)^3}\sin(n\pi t)\right)_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{n\pi}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}+\frac{2}{(n\pi)^2}\cos(n\pi)-\frac{2}{(n\pi)^3}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}-0-0-0\right)=\frac{4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi)=\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

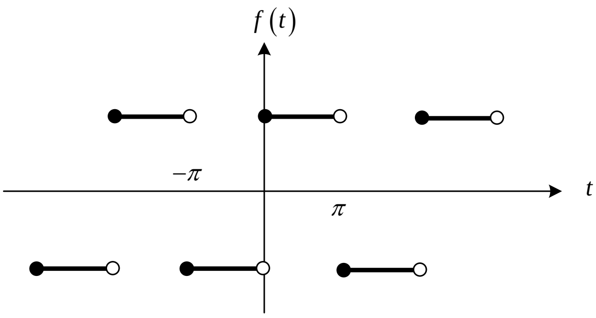
بنابراین سری فوریه تابع $f(t)$ در بازه $t\in(-\pi,\pi)$ طبق رابطه ۲-۱ برابر است با:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}\times\cos\left(\frac{2\pi n}{2}t\right)=\frac{1}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\times\cos(n\pi t)$$

$$\rightarrow\boxed{f(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi t)+\frac{1}{4\pi^2}\cos(2\pi t)-....}$$

۲) $f(t)=\begin{cases}-k & -\pi\le t<0\\ k & 0\le t\le\pi\end{cases},\ T=2\pi,\ t\in(-\pi,\pi)$

ابتدا زوج و فرد بودن تابع را مشخص می نماییم:



تابع نسبت به مبدأ تقارن دارد پس فرداست بنابراین تنها باید ضریب b_n را محاسبه کنیم. از رابطه ۲-۱۱ داریم:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{\cancel{2\pi} n}{\cancel{2\pi}}t\right)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(k)\sin(nt)dt = \frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt = \frac{2k}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2k}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \underbrace{\cos(0)}_{=1}\right) = \frac{2k}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{زوج} \quad n \\ \frac{2k}{n\pi}(1-(-1)) = \frac{4k}{n\pi} & \text{فرد} \quad n \end{cases}$$

بنابراین سری فوریه تابع $f(t)$ در بازه $t \in (-\pi, \pi)$ طبق رابطه ۲-۱۲ برابر است با:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4k}{(2n-1)\pi}\right)\sin\left(\frac{\cancel{2\pi} n}{\cancel{2\pi}}t\right) = \frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)}\sin((2n-1)t)\right)$$

b_n تنها برای مقادیر فرد باید مقدار داشته باشد.

$$\rightarrow \boxed{f(t) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + ...\right)}$$

۳) $f(t) = t + \sin(t),\ T = 2\pi, t \in (-\pi, \pi)$

نکته: هدف از نوشتن سری فوریه توابع، محاسبه سری معادل بر حسب جملات سینوسی، کسینوسی و عدد ثابت می باشد. بنابراین اگر تابعی خود بصورت $\cos(\alpha t)/\sin(\alpha t)$ بود سری فوریه معادل آن خودش می شود.

بنابر نکته فوق از تابع $f(t)$ تنها باید سری فوریه t را محاسبه نماییم چون سری فوریه $\sin(t)$ خودش خواهد بود.

$$f_1(t) = t,\ T = 2\pi$$
$$t \in (-\pi, \pi)$$

تابع $f_1(t)$ فرد است زیرا:

$$f_1(-t) = -t = -f_1(t)$$

بنابراین در محاسبه ضرایب سری فوریه تنها b_n را محاسبه می کنیم:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f_1(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} f_1(t)\sin\left(\frac{\cancel{2\pi} n}{\cancel{2\pi}}t\right)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt$$

برای محاسبه b_n از روش پروانه ای داریم:

$$\begin{array}{c|l} \text{مشتق} & \text{انتگرال} \\ \hline t \;\; + & \sin(nt) \\ 1 \;\; - & -\frac{1}{n}\cos(nt) \\ 0 & -\frac{1}{n^2}\sin(nt) \end{array}$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(t\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)-\left(-\frac{1}{n^2}\sin(nt)\right)\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}t\cos(nt)+\frac{1}{n^2}\sin(nt)\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos(n\pi)+\frac{1}{n^2}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}-0-0\right)=-\frac{2}{\cancel{\pi}}\times\frac{\cancel{\pi}}{n}\cos(n\pi)=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

بنابراین سری فوریه تابع $f(t)=f_1(t)+\sin(t)$ در بازه $t\in(-\pi,\pi)$ طبق رابطه ۲-۱۲ برابر است با:

$$f(t)=\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right)}_{f_1(t)}+\sin(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin\left(\frac{\cancel{2\pi}n}{\cancel{2\pi}}t\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin(nt)$$

$$\rightarrow\boxed{\begin{aligned} f(t)&=2\left(\sin(t)-\frac{1}{2}\sin(2t)+\frac{1}{3}\sin(3t)+....\right)+\sin(t)\\ &=3\sin(t)-\sin(2t)+\frac{2}{3}\sin(3t)+....\end{aligned}}$$

۲-۱-۳- بسط نیم دامنه:

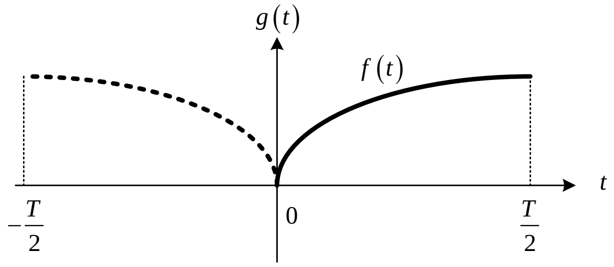
برای نوشتن سری فوریه معادل برای تابع $f(t)$ که متناوب نبوده و در بازه $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ تعریف شده است می توان از بسط نیم دامنه استفاده نمود، بدین معنا که ابتدا تابع جدید $g(t)$ در بازه متقارن $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ بصورت زوج یا فرد چنان بسط داده می‌شود که در بازه $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ همان $f(t)$ باشد. سپس با نوشتن سری فوریه تابع زوج یا فرد $g(t)$ در بازه $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ به سری فوریه معادل تابع $f(t)$ خواهیم رسید.

الف) سری فوریه کسینوسی تابع غیرمتناوب $f(t)$:

اگر تابع $f(t)$ بصورت زوج بسط داده شود داریم:

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & 0\le t\le\frac{T}{2}\\ f(-t) & -\frac{T}{2}\le t\le 0\end{cases}$$

شکل زیر بسط زوج تابع $f(t)$ را به خوبی نمایش می دهد:



شکل ۲-۲: بسط زوج تابع $f(t)$

بنابراین سری فوریه تابع $g(t)$ که در بازه $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ همان $f(t)$ می باشد، معادل سری فوریه تابع زوج خواهد بود:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \qquad (۱۳-۲)$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \qquad (۱۴-۲)$$

$$b_n=0 \qquad (۱۵-۲)$$

بنابراین:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \qquad (۱۶-۲)$$

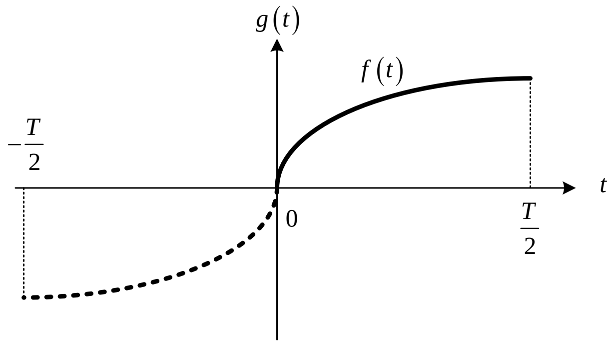
از آنجا که این سری فوریه تنها شامل جملات کسینوسی می باشد، به آن **بسط کسینوسی** یا **سری فوریه کسینوسی** تابع $f(t)$ گویند.

ب) سری فوریه سینوسی تابع غیرمتناوب $f(t)$:

اگر تابع $f(t)$ بصورت فرد بسط داده شود داریم:

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & 0\le t\le \frac{T}{2} \\ -f(-t) & -\frac{T}{2}\le t\le 0 \end{cases}$$

شکل زیر بسط فرد تابع $f(t)$ را به خوبی نمایش می دهد:



شکل ۲-۲: بسط فرد تابع $f(t)$

بنابراین سری فوریه تابع $g(t)$ که در بازه $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ همان $f(t)$ می باشد، معادل سری فوریه تابع فرد خواهد بود:

$$a_0=0 \qquad (۱۷-۲)$$

$$a_n=0 \qquad (۱۸-۲)$$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \qquad (۱۹-۲)$$

بنابراین:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \qquad (۲۰-۲)$$

از آنجا که این سری فوریه تنها شامل جملات سینوسی می باشد، به آن **بسط سینوسی** یا **سری فوریه سینوسی** تابع $f(t)$ گویند.

نکته: دوره تناوب تابع بسط داده شده دو برابر طول نیم بازه $t\in\left(0,\frac{T}{2}\right)$ می باشد.

به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۲-۳

سری فوریه کسینوسی تابع $f(t)$ را محاسبه نمایید:

$$f(t)=1-\frac{t}{2},\ t\in(0,2)$$

ابتدا دوره تناوب تابع بسط داده شده را مشخص می نماییم:

$$t\in(0,2)\to T=2(2-0)=4$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt=\frac{2}{4}\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(t-\frac{t^2}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\left(2-\frac{2^2}{4}-0-0\right)=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{4}{4}\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{4}t\right)dt=\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt$$

مشتق		انتگرال
$1-\frac{t}{2}$	$+$	$\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$
$-\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$
0		$-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$

$$a_n=\left(\left(1-\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right)\right)\Bigg|_0^2$$

$$=\left(\frac{2}{n\pi}\left(1-\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)-\frac{2}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right)\Bigg|_0^2=\left(0-\frac{2}{(n\pi)^2}\cos(n\pi)\right)-\left(0-\frac{2}{(n\pi)^2}\cos(0)\right)$$

$$=-\frac{2}{(n\pi)^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)=-\frac{2}{(n\pi)^2}\left((-1)^n-1\right)$$

$$=\begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \dfrac{4}{(n\pi)^2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}t\right) \qquad ,0\le t\le 2$$

$$\rightarrow \boxed{f(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\frac{1}{3!}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)+\frac{1}{5!}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)+\dots\right)}$$

مثال ۲-۴

سری فوریه سینوسی تابع $f(t)$ را محاسبه نمایید:

$$f(t)=t-1,\ t\in(0,1)$$

ابتدا دوره تناوب تابع بسط داده شده را مشخص می نماییم:

$$t\in(0,1)\rightarrow T=2(1-0)=2$$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt=\frac{4}{2}\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{\cancel{2}\pi n}{\cancel{2}}t\right)dt$$

$$=2\int_0^1 (t-1)\sin(n\pi t)\,dt$$

مشتق	انتگرال
$t-1$ $+$	$\sin(n\pi t)$
$1-0$ $-$	$-\dfrac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)$
0	$-\dfrac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi t)$

$$b_n=2\left((t-1)\left(-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right)-\left(-\frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi t)\right)\right)\Bigg|_0^1=2\left(-\frac{1}{n\pi}(t-1)\cos(n\pi t)+\frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi t)\right)\Bigg|_0^1$$

$$=2\left((0+0)-\left(\frac{1}{n\pi}\cos(0)+0\right)\right)=\frac{-2}{n\pi}$$

بنابراین:

$$f(t)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi t)}{n} \qquad ,0\le t\le 1$$

$$\rightarrow \boxed{f(t)=-\frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi t)+\frac{1}{2}\sin(2\pi t)+\dots\right)}$$

۲-۱-۴- سری فوریه نمایی یک تابع متناوب:

اگر توابع سینوسی و کسینوسی را بر حسب تابع نمایی و به فرم زیر بیان کنیم:

$$\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \qquad (۲۱-۲)$$

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad (۲۲-۲)$$

رابطه ۲-۱ به یک رابطه ساده به فرم

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)} \qquad (۲۳-۲)$$

تبدیل می شود که در آن

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}dt \qquad (۲۴-۲)$$

می باشد. رابطه ۲-۲۳ را سری فوریه نمایی تابع $f(t)$ نامند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲-۵

سری فوریه نمایی تابع $f(t)$ را محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=e^t,\ T=2\pi,\ t\in(-\pi,\pi)$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^t e^{-i\left(\frac{2\pi n}{2\pi}t\right)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^t e^{-int}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)t}dt=\frac{1}{2\pi(1-in)}e^{(1-in)t}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right)\times\frac{i}{i}=\frac{i}{\pi(1-in)}\left(\frac{e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}}{2i}\right)=\frac{i}{\pi(1-in)}\sinh\left((1-in)t\right)$$

بنابراین:

$$f(t)=\frac{i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\left((1-in)t\right)}{(1-in)}e^{int}$$

۲) $f(t)=t,\ T=2\pi,\ t\in(-\pi,\pi)$

مشتق		انتگرال
t	$+$	$e^{-\text{int}}$
1	$-$	$-\frac{1}{in}e^{-\text{int}}$
0		$\frac{1}{(in)^2}e^{-\text{int}}$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\left(t\left(\underbrace{-\frac{1}{in}}_{-\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{-i}{i^2}=i}e^{-\text{int}}\right)-\frac{1}{\underbrace{(in)^2}_{i^2n^2=-n^2}}e^{-\text{int}}\right)_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{i}{n}te^{-\text{int}}+\frac{1}{n^2}e^{-\text{int}}\right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{i}{n}\pi e^{-\text{in}\pi}+\frac{1}{n^2}e^{-\text{in}\pi}-\frac{i}{n}(-\pi)e^{\text{in}\pi}-\frac{1}{n^2}e^{\text{in}\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{i}{n}\pi\left(e^{-\text{in}\pi}+e^{\text{in}\pi}\right)+\frac{1}{n^2}\left(e^{-\text{in}\pi}-e^{\text{in}\pi}\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{i}{n}\pi\left(2\times\frac{e^{-\text{in}\pi}+e^{\text{in}\pi}}{2}\right)+\frac{1}{n^2}\left(2i\times\frac{e^{-\text{in}\pi}-e^{\text{in}\pi}}{2i}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi i}{n}\left(\cos(n\pi)\right)+\frac{2i}{n^2}\left(\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\right)\right)=\frac{1}{\cancel{2\pi}}\frac{\cancel{2\pi}i}{n}\left(\cos(n\pi)\right)=\frac{i}{n}\cos(n\pi)=\frac{i}{n}(-1)^n$$

بنابراین:

$$f(t)=i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{int}$$

۲-۱-۵- خواص سری فوریه:

سری فوریه توابع متناوب دارای خواصیست که برخی از آنها بصورت لیست وار در جدول ۲-۱ آمده است:

جدول ۲-۱: خواص سری فوریه

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}\ ,\ g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$$

ردیف	خصوصیت	تابع	سری فوریه معادل
۱.	خطی بودن	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$
۲.	شیفت زمانی	$f(t-t_0)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t_0\right)}\right)e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$
۳.	شیفت فرکانسی	$f(t)e^{i\left(\frac{2\pi M}{T}t\right)}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n-M}e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$
۴.	معکوس زمانی	$f(-t)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{-n}e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$
۵.	کانولوشن[1]	$f(t)*g(t)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(Ta_n b_n)e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$
۶.	ضرب	$f(t)g(t)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}a_n b_{n-\ell}\right)e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$
۷.	مشتق	$\frac{df(t)}{dt}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(i\frac{2\pi n}{T}a_n\right)e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$
۸.	انتگرال (با شرط $a_0=0$)	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{T}{i2\pi n}a_n\right)e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$
۹.	قانون پارسوال	$\frac{1}{T}\int_T\left\|f(t)\right\|^2dt=\sum_{-\infty}^{\infty}\left\|a_n\right\|^2$	

۲-۲- انتگرال فوریه:

برای توابع غیرمتناوب، بجای سری فوریه می توان انتگرال فوریه معادل را استفاده نمود. اگر تابع $f(t)$ یک تابع غیرمتناوب و مطلقاً انتگرال پذیر[2] باشد، آنگاه می توان یک معادله انتگرالی به فرم زیر بعنوان انتگرال فوریه معادل برای آن محاسبه نمود:

---

[1] کانوالو، یک عمل ریاضی بین دو تابع می باشد که حاصل آن یک رابطه انتگرالی به نام انتگرال کانولوشن است. کانوالو دو تابع با علامت * نمایش داده می شود:

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

[2] تابع $f(t)$ در □ مطلقاً انتگرال پذیر است،اگر انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt$ همگرا باشد.

$$f(t)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos(\omega t)+B(\omega)\sin(\omega t)\right)d\omega \qquad (۲-۲۵)$$

که در آن:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt \qquad (۲-۲۶)$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt \qquad (۲-۲۷)$$

می باشند.

۲-۲-۱- انتگرال فوریه توابع زوج:

با استفاده از خواص توابع زوج، انتگرال فوریه توابع زوج بصورت زیر خواهد بود:

$$f(t)=\int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega \qquad (۲-۲۸)$$

که در آن:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt \qquad (۲-۲۹)$$

$$B(\omega)=0 \qquad (۲-۳۰)$$

می باشند.

۲-۲-۱- انتگرال فوریه توابع فرد:

با استفاده از خواص توابع فرد، انتگرال فوریه توابع زوج بصورت زیر خواهد بود:

$$f(t)=\int_0^{\infty} B(\omega)\sin(\omega t)\,d\omega \qquad (۲-۳۱)$$

که در آن:

$$A(\omega)=0 \qquad (۲-۳۲)$$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt \qquad (۲-۳۳)$$

می باشند.

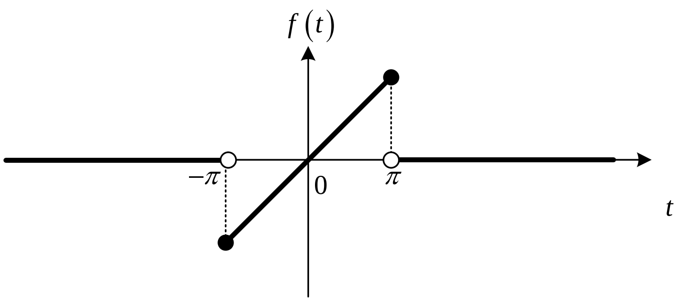
با ارائه چند مثال بیشتر این موضوع را بررسی خواهیم نمود:

مثال ۲-۶:

انتگرال فوریه توابع زیر را محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=\begin{cases} t & |t|\le\pi \\ 0 & |t|>\pi \end{cases}$

$$\begin{cases} |t|\le\pi \rightarrow -\pi\le t\le\pi \\ |t|>\pi \rightarrow \begin{cases} t>\pi \\ t<-\pi \end{cases} \end{cases}$$



تابع $f(t)$ فرد است بنابراین با استفاده از روابطه ۲-۳۱ تا ۲-۳۳ داریم:

$$A(\omega)=0$$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(\omega t)\,dt$$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\left(t\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right)-\left(-\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)\right)\right)_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega}t\cos(\omega t)+\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)\right)_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega}\pi\cos(\omega\pi)+\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega\pi)-0-0\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega}\pi\cos(\omega\pi)+\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega\pi)\right)$$

$$=\left(-\frac{2}{\omega}\cos(\omega\pi)+\frac{2}{\pi\omega^2}\sin(\omega\pi)\right)$$

مشتق	انتگرال
t (+)	$\sin(\omega t)$
1 (−)	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)$
0	$-\frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)$

نکته: از آنجا که ω یک عدد حقیقی و متعلق به ω است در حالت کلی $\sin(\omega\pi)\neq 0,\cos(\omega\pi)\neq(-1)^{\omega}$ می باشد.

بنابراین:

$$f(t)=\int_0^{\infty}\left(-\frac{2}{\omega}\cos(\omega\pi)+\frac{2}{\pi\omega^2}\sin(\omega\pi)\right)\sin(\omega t)\,d\omega$$

۲) $f(t)=e^{-|t|}$

تابع $f(t)$ زوج است بنابراین با استفاده از روابطه ۲-۲۸ تا ۲-۳۰ داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-|t|}\cos(\omega t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\,dt$$

ابتدا توابع u و v را مشخص می کنیم:

$$\begin{cases} u=e^{-t}\rightarrow du=-e^{-t}dt \\ \cos(\omega t)dt=dv\rightarrow v=\int\cos(\omega t)\,dt=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\end{cases}$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\omega t)\,dt=\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{e^{-t}}_{u}\left(\underbrace{\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)}_{v}\right)-\int\left(\underbrace{\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)}_{v}\right)\underbrace{\left(-e^{-t}dt\right)}_{du}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)e^{-t}\Big|_0^{\infty}}_{=0}+\frac{1}{\omega}\int_0^{\infty} e^{-t}\sin(\omega t)\,dt\right)=\frac{2}{\omega\pi}\int_0^{\infty} e^{-t}\sin(\omega t)\,dt$$

اکنون بار دیگر از روش جزء به جزء استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} u=e^{-t}\rightarrow du=-e^{-t}dt \\ \sin(\omega t)dt=dv\rightarrow v=\int\sin(\omega t)\,dt=-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\end{cases}$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\omega\pi}\int_0^\infty e^{-t}\sin(\omega t)\,dt=\frac{2}{\omega\pi}\left(\left(\underbrace{e^{-t}}_{u}\underbrace{\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right)}_{v}\right)\Bigg|_0^\infty-\int_0^\infty\underbrace{\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right)}_{v}\underbrace{\left(-e^{-t}dt\right)}_{du}\right)$$

$$=\frac{2}{\omega\pi}\left(\underbrace{\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)e^{-t}\right)\Bigg|_0^\infty}_{=-\frac{1}{\omega}(0-1)=\frac{1}{\omega}}-\frac{1}{\omega}\underbrace{\int_0^\infty e^{-t}\cos(\omega t)}_{I}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi\omega^2}-\frac{2}{\pi\omega^2}I$$

$$\to A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\cos(\omega t)=\frac{2}{\pi}I$$

$$\to \frac{2}{\pi}I=\frac{2}{\pi\omega^2}-\frac{2}{\pi\omega^2}I$$

$$\to I\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{1}{\omega^2}\to I\left(\frac{\omega^2+1}{\omega^2}\right)=\frac{1}{\omega^2}\to I=\frac{1}{\omega^2+1}$$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1}$$

$$B(\omega)=0$$

بنابراین:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\omega^2+1}\right)\cos(\omega t)\,d\omega$$

۲-۳- تبدیل فوریه:

اگر انتگرال فوریه تابع $f(t)$ را به فرم نمایی بیان کنیم، به تابع حاصل که تابعی از متغیر ω می باشد، تبدیل فوریه $f(t)$ گویند:

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (۲-۳۴)$$

که در آن $F(\omega)$ تبدیل فوریه $f(t)$ و $\mathcal{F}\{\ \}$ عملگر تبدیل فوریه می باشد.

تبدیل فوریه برای ساده سازی محاسبات پیچیده و انتگرالی حوزه زمان (t) بکار می رود. بطوریکه با تبدیل فوریه، حوزه زمان (t) به حوزه فرکانس (ω) تبدیل شده که در این حوزه محاسبات به مراتب ساده تر خواهد بود. در انتهای محاسبات برای محاسبه پاسخ در حوزه زمان باید از تبدیلی دیگر که حوزه فرکانس را به حوزه زمان تبدیل می کند استفاده نمود که این تبدیل را عکس تبدیل فوریه نامند:

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{f(t)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \qquad (۲-۳۵)$$

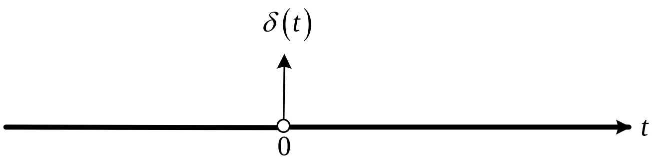
که در آن $\mathcal{F}^{-1}\{\ \}$ را عملگر عکس تبدیل تبدیل فوریه گویند.

به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۲-۶:

تبدیل فوریه توابع زیر را محاسبه نمایید:

$$۱)\ \delta(t)=\begin{cases}\text{نامعلوم} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$



نکته: تابع $\delta(t)$ با مشخصات فوق را تابع ضربه[۱] یا دلتای دیراک گویند. مقدار تابع در نقطه صفر، نامعلوم است برای همین آن را با یک فلش نمایش می دهند.

خواص مهم تابع بصورت زیر است:

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1 & (*)\\ f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) & (**)\end{cases}$$

اکنون تبدیل فوریه تابع پله را محاسبه می کنیم:

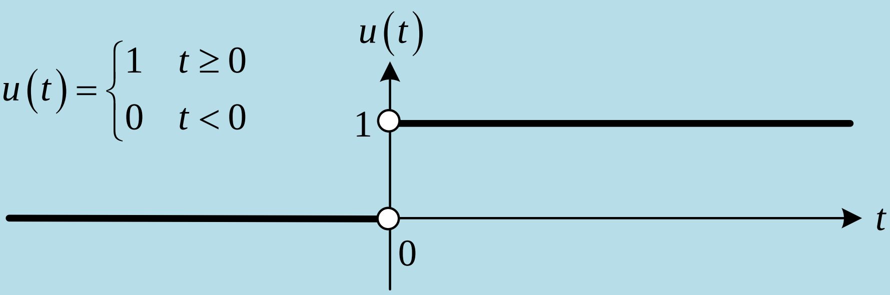
$$\delta(t)e^{-i\omega t}=\delta(t-0)e^{-i\omega t}\overset{(**)}{=}\delta(t)e^{0}=\delta(t)$$

$$\rightarrow \mathcal{F}\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt\overset{(*)}{=}1$$

$$۲)\ f(t)=e^{-kt}u(t)$$

نکته: تابع $u(t)$ با مشخصات فوق را تابع پله[۲] یا هوی ساید گویند. خاصیت مهم تابع پله در اینست که اگر در هر تابعی ضرب گردد، مقادیر تابع را در دامنه منفی آن حذف می کند.

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

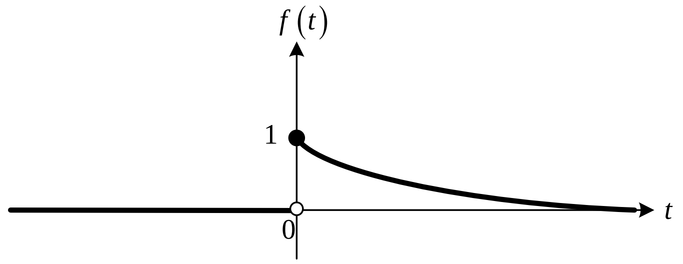


ضریب $u(t)$ در کنار توابع معمولاً زمانی بکار برده می شود که متغیر تابع زمان باشد و از آنجا که زمان نمی تواند

[۱] Impulse Function or Dirac Delta Function

[۲] Unit Step Function or Heavy Side Function

منفی باشد، تابع مورد نظر هرگز در دامنه منفی مقدار نخواهد داشت.



$$\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-kt}u(t)\right)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty} e^{-t(i\omega+k)}\,dt=\frac{-1}{k+i\omega}e^{-t(i\omega+k)}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{-1}{k+i\omega}(0-1)=\frac{1}{k+i\omega}$$

برای آنکه کمتر از محاسبات انتگرالی که در مثال ۲-۶ بیان گردید استفاده شود، دو جدول خواص تبدیل فوریه و زوج تبدیلات فوریه ارائه شده است.

با استفاده از ترکیب این دو جدول می توان تبدیل فوریه اکثر توابع را مشخص نمود.

جدول ۲-۲: جدول زوج تبدیلات فوریه

$F(\omega)$	$f(t)$	ردیف
1	$\delta(t)$	۱
$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}$	$u(t)$	۲
$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$e^{i\omega_0 t}$	۳
$\frac{2a}{\omega^2+a^2}$	$e^{-a\lvert t\rvert}$	۴
$\frac{1}{i\omega+a}$	$e^{-at}u(t)$	۵
$\frac{1}{(i\omega+a)^2}$	$t.e^{-at}.u(t)$	۶
$\frac{\pi}{i}\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)$	$\sin(\omega_0 t)$	۷
$\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$	$\cos(\omega_0 t)$	۸
$\frac{\pi}{2i}\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)+\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}$	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	۹
$\frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)+\frac{i\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	۱۰
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	۱۱
$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	۱۲

$\dfrac{\pi}{a}e^{-a\lvert\omega\rvert}$	$\dfrac{1}{t^2+a^2}$	۱۳

جدول ۲-۳: جدول خواص تبدیل فوریه

$F(\omega)$	$f(t)$	ردیف
$\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	۱
$\dfrac{1}{\lvert\alpha\rvert}F\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$	$f(\alpha t)$	۲
$e^{-i\omega t_0}F(\omega)$	$f(t-t_0)$	۳
$F(\omega-\omega_0)$	$e^{\omega_0 t}f(t)$	۴
$\dfrac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$	$(-it)^n.f(t)$	۵
$(i\omega)^nF(\omega)$	$\dfrac{d^nf(t)}{dt^n}$	۶
$\dfrac{F((\omega))}{i\omega}+\pi\delta(\omega)F(0)$	$\int_0^\infty f(\tau)d\tau$	۷
$\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(t)\rvert^2dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert F(\omega)\rvert^2d\omega$	قانون پارسوال	۸

برای آشنایی بیشتر با روش استفاده از جداول فوق، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲-۷:

تبدیل فوریه توابع زیر را محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=\sin(3t)+4\cos(2t)+e^{\lvert t\rvert}$

تابع $f(t)$ از مجموع سه تابع تشکیل شده است. برای محاسبه $F(\omega)$ با استفاده از خاصیت اول جدول ۲-۳ ابتدا تبدیل فوریه سه تابع را جداگانه محاسبه نموده و سپس جمع می نماییم:

$$\mathcal{F}\left\{\sin\left(\underbrace{3}_{\omega_0}t\right)\right\}=\frac{\pi}{i}\left(\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)\right)$$ ردیف ۷ جدول ۲-۲

$$\mathcal{F}\left\{\cos\left(\underbrace{2}_{\omega_0}t\right)\right\}=\pi\left(\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)\right)$$ ردیف ۸ جدول ۲-۲

$$\mathcal{F}\left\{\underbrace{e^{\lvert t\rvert}}_{a=-1}\right\}=\frac{-2}{\omega^2+1}$$ ردیف ۴ جدول ۲-۲

$$\to F(\omega)=\mathcal{F}\{\sin(3t)\}+4\mathcal{F}\{\cos(2t)\}+\mathcal{F}\{e^{\lvert t\rvert}\}$$

$$=\frac{\pi}{i}\left(\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)\right)+4\pi\left(\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)\right)-\frac{2}{\omega^2+1}$$

۲) $f\left(t\right)=e^{-2\left|t-4\right|}$

تابع $f\left(t\right)$ تابع $e^{-2|t|}$ است که دارای شیفتی برابر با $t_0=4$ می باشد:

ردیف ۴ جدول ۲-۲ و ردیف ۴ جدول ۲-۳

$$\mathcal{F}\left\{e^{-2|t-4|}\right\}=e^{-4i\omega}\mathcal{F}\left\{\underbrace{e^{-2|t|}}_{a=2}\right\}=\frac{4}{\omega^2+2^2}$$

مثال ۲-۸:

معادله دیفرانسیلی زیر را حل نمایید:

$$y'\left(t\right)-4y\left(t\right)=e^{-4t}u\left(t\right)$$

یکی از کاربردهای تبدیل فوریه، حل معادلات دیفرانسیل می باشد. برای حل معادله دیفرانسیل فوق و محاسبه تابع $y\left(t\right)$ ابتدا به طرفین معادله تبدیل فوریه اعمال می کنیم:

$$\mathcal{F}\left\{y'\left(t\right)-4y\left(t\right)\right\}=\mathcal{F}\left\{e^{-4t}u\left(t\right)\right\}$$

$$\rightarrow\mathcal{F}\left\{y'\left(t\right)\right\}-4\mathcal{F}\left\{y\left(t\right)\right\}=\mathcal{F}\left\{e^{-4t}u\left(t\right)\right\}$$

$$\rightarrow\left(i\omega\right)Y\left(\omega\right)-4Y\left(\omega\right)=\frac{1}{i\omega+4}\rightarrow Y\left(\omega\right)\left(i\omega-4\right)=\frac{1}{i\omega+4}$$

$$\rightarrow Y\left(\omega\right)=\frac{1}{\left(i\omega-4\right)\left(i\omega+4\right)}=\frac{1}{\underbrace{\left(i\omega\right)^2}_{i^2\omega^2=-\omega^2}+4^2}=\frac{1}{-\omega^2-4^2}=\frac{-1}{\omega^2+4^2}$$

اکنون برای بدست آوردن $y\left(t\right)$، عکس تبدیل فوریه $Y\left(\omega\right)$ را محاسبه می کنیم:

$$y\left(t\right)=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-1}{\omega^2+4^2}\right\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2a}{\omega^2+a^2}\right\}=e^{-a|t|}\xrightarrow{a=4}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{8}{\omega^2+4^2}\right\}=e^{-4|t|}$$

$$\rightarrow\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-1}{\omega^2+4^2}\times\frac{8}{8}\right\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-1}{8}\frac{8}{\omega^2+4^2}\right\}=\frac{-1}{8}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-1}{\omega^2+4^2}\right\}=\frac{-1}{8}e^{-4|t|}=y\left(t\right)$$

۲-۴- تبدیل لاپلاس:

تبدیل لاپلاس تبدیلی مشابه به تبدیل فوریه است که تابعی از متغیر مختلط $s=\alpha+i\omega$ می باشد. تبدیل لاپلاس تابع $f\left(t\right)$ به فرم زیر بیان می شود:

$$F\left(s\right)=\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\}=\int_0^\infty f\left(t\right)e^{-st}\,dt \qquad (۲-۳۶)$$

که در آن $F\left(s\right)$ تبدیل لاپلاس $f\left(t\right)$ و $\mathcal{L}\{\ \}$ عملگر تبدیل لاپلاس می باشد.

نکته: تبدیل لاپلاس را تبدیل فوریه یک طرفه نیز گویند.

نکته: تبدیل لاپلاس بر روی توابع تعریف می گردد که در دامنه منفی دارای مقدار صفر باشند، یعنی:

$$f\left(t\right)=0,\ t<0$$

تبدیل لاپلاس نیز مانند تبدیل فوریه برای ساده سازی محاسبات پیچیده و انتگرالی حوزه زمان $\left(t\right)$ بکار می رود. عکس تبدیل لاپلاس بصورت زیر تعریف می گردد:

$$f(t)=L^{-1}\{f(t)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}F(\omega)e^{st}\,ds \qquad (۳۷-۲)$$

که در آن $L^{-1}\{\ \}$ را عملگر عکس تبدیل لاپلاس گویند. به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۲-۹:

تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=u(t)$

$$\rightarrow L\{\delta(t)\}=\int_0^{\infty}u(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty}e^{-st}\,dt=\frac{-1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}$$

۲) $f(t)=te^{-3t}u(t)$

$$L\{f(t)\}=\int_0^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_0^{\infty}\left(te^{-3t}u(t)\right)e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty}te^{-t(3+s)}\,dt$$

مشتق	انتگرال
t (+)	$e^{-t(3+s)}$
1 (−)	$\frac{-1}{(3+s)}e^{-t(3+s)}$
0	$\frac{1}{(3+s)^2}e^{-t(3+s)}$

$$L\{f(t)\}=\left(t\left(\frac{-1}{(3+s)}e^{-t(3+s)}\right)-\frac{1}{(3+s)^2}e^{-t(3+s)}\right)_0^{\infty}=\left(\frac{-1}{(3+s)}te^{-t(3+s)}-\frac{1}{(3+s)^2}e^{-t(3+s)}\right)_0^{\infty}$$

$$=\left(0-0+0+\frac{1}{(3+s)^2}\right)=\frac{1}{(3+s)^2}$$

برای آنکه کمتر از محاسبات انتگرالی که در مثال ۲-۹ بیان گردید استفاده شود، دو جدول خواص تبدیل لاپلاس و زوج تبدیلات لاپلاس ارائه شده است. با استفاده از ترکیب این دو جدول می توان تبدیل لاپلاس اکثر توابع را مشخص نمود.

جدول ۲-۴: جدول زوج تبدیلات لاپلاس

ردیف	$f(t)$	$F(s)$
۱	$\delta(t)$	1
۲	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
۳	$t.u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
۴	$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
۵	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
۶	$t^n.e^{-at}.u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
۷	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
۸	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	۹
$\dfrac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	۱۰

جدول ۲-۵: جدول خواص تبدیل لاپلاس

$F(s)$	$f(t)$	ردیف
$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	۱
$\dfrac{1}{\lvert\alpha\rvert}F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)$	$f(\alpha t)$	۲
$e^{-t_0 s}F(s)$	$f(t-t_0)$	۳
$F(s-s_0)$	$e^{s_0 t}f(t)$	۴
$-\dfrac{dF(s)}{ds}$	$t.f(t)$	۵
$(-1)^n\dfrac{d^nF(s)}{ds^n}$	$t^k.f(t)$	۶
$s^nF(s)-s^{n-1}\dfrac{df(0)}{dt}-s^{n-2}\dfrac{d^2f(0)}{dt^2}-\dots-s^{n-1}\dfrac{d^{k-1}f(0)}{dt^{k-1}}$	$\dfrac{d^nf(t)}{dt^n}$	۷
$\dfrac{F(s)}{s}$	$\int_0^\infty f(t)dt$	۸
$F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t)*f_2(t)$	۹
$\dfrac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty}F_1(p)F_2(s-p)dp$	$f_1(t)\,f_2(t)$	۱۰

برای آشنایی بیشتر با روش استفاده از جداول فوق، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲-۱۰:

تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه نمایید:

۱) $f(t)=te^{-2(t-4)}$

تابع $f(t)$ به نظر یک تابع دارای شیفت به اندازه $t_0=4$ می باشد. می دانیم که اگر تابعی دارای شیفت زمانی به اندازه t_0 باشد این شیفت باید در تمام بخش های آن که بر حسب زمان تعریف شده است دیده شود که در این تابع اینطور نیست. بنابراین ابتدا تابع را به فرم شیفت داده شده تبدیل می کنیم:

$$f(t)=te^{-2(t-4)}=(t-4+4)e^{-2(t-4)}=(t-4)e^{-2(t-4)}+4e^{-2(t-4)}$$

با استفاده از خواص ۱ و ۴ جدول ۲-۵ داریم:

$$\to F(s)=L\left\{(t-4)e^{-2(t-4)}+4e^{-2(t-4)}\right\}=L\left\{(t-4)e^{-2(t-4)}\right\}+4L\left\{e^{-2(t-4)}\right\}=e^{-4s}L\left\{te^{-2t}\right\}+4e^{-4s}L\left\{e^{-2t}\right\}$$

بنابراین طبق زوج تبدیلات شماره ۵ و ۶ جدول ۲-۴ داریم:

$$F(s)=e^{-4s}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right)+4e^{-4s}\left(\frac{1}{(s+2)}\right)=e^{-4s}\left(\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{4}{(s+2)}\right)=e^{-4s}\left(\frac{1+4(s+2)}{(s+2)^2}\right)=e^{-4s}\left(\frac{4s+9}{(s+2)^2}\right)$$

۲) $f(t)=t\cos(3t)$

با استفاده از خاصیت ۵ جدول ۲-۵ و زوج تبدیل شماره ۸ جدول ۲-۴ داریم:

$$\rightarrow F(s)=L\{t\cos(3t)\}=-\frac{d}{ds}L\{\cos(3t)\}\overset{\omega_0=3}{=}-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)=-\left(\frac{\overbrace{1\times(s^2+9)-2s\times s}^{s^2+9-2s^2}}{(s^2+9)^2}\right)=\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$$

یکی دیگر از کاربرد های جدول ۲-۴، استفاده از آن برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس توابع است. با دقت در این جدول می‌بینیم که تبدیل لاپلاس اکثر توابع مهم فرم کسری دارد. بنابراین برای استفاده از این جدول ابتدا باید **در صورت امکان** تابع مورد نظر را به کسرهای جزئی تقسیم نماییم.

مثال ۲-۱۱:

عکس تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه نمایید:

۱) $F(s)=\dfrac{s+7}{s^2+7s+12}$

ابتدا باید تابع را به کسرهای جزئی تقسیم نماییم:

$$F(s)=\frac{s+7}{s^2+7s+12}=\frac{s+7}{(s+3)(s+4)}=\frac{A_1}{(s+3)}+\frac{B}{(s+4)}$$

$$A_1=\lim_{s\to-3}(s+3)F(s)=\lim_{s\to-3}\cancel{(s+3)}\frac{s+7}{\cancel{(s+3)}(s+4)}=\lim_{s\to-3}\frac{s+7}{(s+4)}=4$$

$$A_2=\lim_{s\to-4}(s+4)F(s)=\lim_{s\to-4}\cancel{(s+4)}\frac{s+7}{(s+3)\cancel{(s+4)}}=\lim_{s\to-4}\frac{s+7}{(s+3)}=-3$$

$$\rightarrow F(s)=\frac{4}{(s+3)}-\frac{3}{(s+4)}$$

اکنون با استفاده از زوج تبدیل شماره ۵ جدول ۲-۴ داریم:

$$\rightarrow f(t)=4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\}-3L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)}\right\}=\left(4e^{-3t}-3e^{-4t}\right)u(t)$$

۲) $F(s)=\dfrac{s^2-5s+6}{s^2+7s+10}$

ابتدا باید تابع را به کسرهای جزئی تقسیم نماییم:

$$\begin{array}{l} s^2-5s+6 \;\big|\; \underline{s^2+7s+10} \\ \underline{-\left(s^2+7s+10\right)} \qquad 1 \\ \qquad -12s-4 \end{array}$$

$$\to F(s)=\frac{s^2-5s+6}{s^2+7s+10}=1+\overbrace{\frac{-12s-4}{s^2+7s+10}}^{G(s)}=1+\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s+5}$$

$$A_1=\lim_{s\to-2}(s+2)G(s)=\lim_{s\to-2}\cancel{(s+2)}\frac{-12s-4}{\cancel{(s+2)}(s+5)}=\lim_{s\to-2}\frac{-12s-4}{(s+5)}=6.67$$

$$A_2=\lim_{s\to-5}(s+4)G(s)=\lim_{s\to-5}\cancel{(s+4)}\frac{-12s-4}{(s+2)\cancel{(s+5)}}=\lim_{s\to-5}\frac{-12s-4}{(s+2)}=-18.67$$

$$\to F(s)=1+\frac{6.67}{(s+2)}-\frac{18.67}{(s+5)}$$

اکنون با استفاده از زوج تبدیلات شماره ۱ و ۵ جدول ۲-۴ داریم:

$$\to f(t)=L^{-1}\{1\}+6.67L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}-18.67L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+5)}\right\}=\delta(t)+\left(6.67e^{-2t}-18.67e^{-5t}\right)u(t)$$

۳) $F(s)=\dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$

ابتدا باید تابع را به کسرهای جزئی تقسیم نماییم:

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\underbrace{\frac{A_{11}}{(s+1)}}_{\substack{k=3\\j=1}}+\underbrace{\frac{A_{12}}{(s+1)^2}}_{\substack{k=3\\j=2}}+\underbrace{\frac{A_{13}}{(s+1)^3}}_{\substack{k=3\\j=3}}$$

$$A_{11}=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{s\to-1}\frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}}\left((s+1)^3F(s)\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d^2}{ds^2}\left(\cancel{(s+1)^3}\frac{s^2+2s+3}{\cancel{(s+1)^3}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d^2}{ds^2}\left(s^2+2s+3\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times2=1$$

$$A_{12}=\frac{1}{(3-2)!}\lim_{s\to-1}\frac{d^{3-2}}{ds^{3-2}}\left((s+1)^3F(s)\right)=\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left(\cancel{(s+1)^3}\frac{s^2+2s+3}{\cancel{(s+1)^3}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left(s^2+2s+3\right)$$

$$=\lim_{s\to-1}(2s+2)=0$$

$$A_{13}=\frac{1}{\underbrace{(3-3)!}_{0!=1}}\lim_{s\to-1}\frac{d^{3-3}}{ds^{3-3}}\left((s+1)^3F(s)\right)=\lim_{s\to-1}\left(\cancel{(s+1)^3}\frac{s^2+2s+3}{\cancel{(s+1)^3}}\right)=\lim_{s\to-1}\left(s^2+2s+3\right)=2$$

$$f(t)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\frac{1}{(s+1)}+\frac{2}{(s+1)^3}$$

اکنون با استفاده از زوج تبدیلات شماره ۵ و ۶ جدول ۲-۴ داریم:

$$\rightarrow f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\}=\left(e^{-t}+t^2e^{-t}\right)u(t)$$

نکته: اگر کسر مورد نظر ریشه حقیقی نداشته باشد، عکس تبدیل لاپلاس نیازی به تجزیه کسر نداشته و قطعاً یکی از زوج تبدیلات شماره ۹ و ۱۰ جدول ۲-۴ و یا ترکیبی از آندو خواهد بود.

به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۲-۱۲:

تبدیل لاپلاس تابع زیر را محاسبه نمایید:

$$F(s)=\frac{s^2+2s+1}{s^2-s+1}$$

$$\begin{array}{r|l} s^2+2s+1 & s^2-s+1 \\ \cline{2-2} -\left(s^2-s+1\right) & 1 \\ \hline 3s & \end{array}$$

$$\rightarrow F(s)=\frac{s^2+2s+1}{s^2-s+1}=1+\frac{3s}{s^2-s+1}$$

$$s^2-s+1=0\rightarrow\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$$

بنابراین در محاسبه عکس تبدیل لاپلاس قطعاً به یکی از زوج تبدیلات شماره ۹ و ۱۰ جدول ۲-۴ یا ترکیبی از آندو می رسیم. ابتدا مخرج کسر را با فرم زوج تبدیلات ۹ و ۱۰ متحد قرار می دهیم:

$$s^2-s+1\equiv(s+a)^2+\omega_0^2=s^2+2as+a^2+\omega_0^2$$

$$\rightarrow\begin{cases}2a=-1\\ a^2+\omega_0^2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-1}{2}\\ \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2+\omega_0^2=1\rightarrow\omega_0^2=1-\dfrac{1}{4}\rightarrow\omega_0=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$$\rightarrow s^2-s+1=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow F(s)=1+\frac{3s}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

اکنون صورت کسرها را به فرم زوج تبدیلات ۹ و ۱۰ تبدیل می کنیم:

$$F(s)=1+\frac{3\left(s-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1+\frac{3\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\overbrace{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=1+\frac{3\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\to f(t)=L^{-1}\left\{1+\frac{3\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$=L^{-1}\{1\}+3L^{-1}\left\{\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}+\sqrt{3}L^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$=\delta(t)+e^{-\frac{1}{2}t}\left(3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)u(t)$$

مثال ۲-۱۳:

معادله دیفرانسیلی زیر را حل نمایید:

۱) $y''(t)+4y'(t)+5y(t)=3\delta(t)$

$y'(0)=y(0)=0$

به منظور حل معادله دیفرانسیلی و محاسبه $y(t)$ باید از طرفین تبدیل لاپلاس گرفته شود. با استفاده از خواص ۱ و ۷ جدول ۲-۵ داریم:

$$L\{y''(t)+4y'(t)+5y(t)\}=L\{3\delta(t)\}$$

$$\to L\{y''(t)\}+4L\{y'(t)\}+5L\{y(t)\}=3L\{\delta(t)\}$$

$$\to\left(s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{=0}-\underbrace{y'(0)}_{=0}\right)+4\left(sY(s)-s\underbrace{y(0)}_{=0}\right)+5Y(s)=3$$

$$\to Y(s)\left(s^2+4s+5\right)=3\to Y(s)=\frac{3}{s^2+4s+5}$$

$$s^2+4s+5=0\to\Delta=4^2-4\times5\times1=-9<0$$

بنابراین در محاسبه عکس تبدیل لاپلاس قطعاً به یکی از زوج تبدیلات شماره ۹ و ۱۰ جدول ۲-۴ یا ترکیبی از آندو می رسیم. ابتدا مخرج کسر را با فرم زوج تبدیلات ۹ و ۱۰ متحد قرار می دهیم:

$$s^2+4s+5 \equiv (s+a)^2+\omega_0^2 = s^2+2as+a^2+\omega_0^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a=4 \\ a^2+\omega_0^2=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ 2^2+\omega_0^2=5 \rightarrow \omega_0^2=1 \rightarrow \omega_0=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow s^2+4s+5=(s+2)^2+1^2$$

$$\rightarrow Y(s)=\frac{3}{(s+2)^2+1^2}$$

اکنون با استفاده از زوج تبدیل شماره ۱۰ جدول ۲-۴ داریم:

$$\rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+1^2}\right\}=3L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right\}=3e^{-2t}\sin(t)u(t)$$

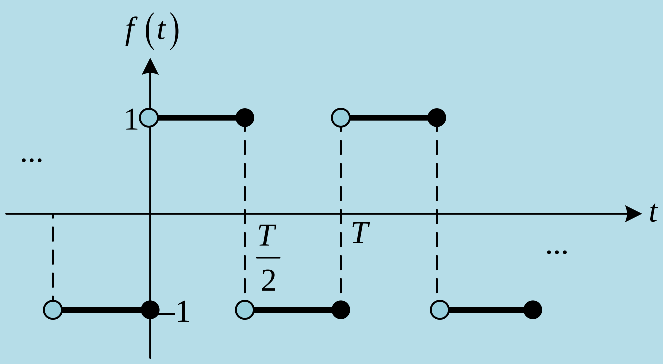
نکته: اگر تابع $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، تبدیل لاپلاس آن از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲-۱۴:

تبدیل لاپلاس تابع زیر را محاسبه نمایید:



ابتدا رابطه ریاضی تابع $f(t)$ را می نویسیم:

$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t\le \frac{T}{2} \\ -1 & 0<t\le T \end{cases} \quad , \quad f(t+T)=f(t)$$

اکنون با استفاده از نکته فوق داریم:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}(1)e^{-st}dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-1)e^{-st}dt\right)=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\frac{T}{2}}+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}\right)$$

$$=\frac{1}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\left(-e^{-st}\Big|_0^{\frac{T}{2}}+e^{-st}\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}\right)=\frac{1}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\left(-e^{-\frac{sT}{2}}+1+e^{-sT}-e^{-\frac{sT}{2}}\right)=\frac{1}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}\left(1-2e^{-\frac{sT}{2}}+e^{-sT}\right)$$

$$x=e^{-\frac{sT}{2}}\rightarrow x^2=e^{-sT}\rightarrow 1-2e^{-\frac{sT}{2}}+e^{-sT}=1-2x+x^2=(1-x)^2=\left(1-e^{\frac{-Ts}{2}}\right)^2$$

$$F(s)=\frac{\left(1-e^{\frac{-Ts}{2}}\right)^2}{s\left(1-e^{-Ts}\right)}$$

این مبحث را با بیان دو قضیه مهم در تبدیل لاپلاس به پایان می بریم:

■ **قضیه مقدار اولیه:** اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، مقدار اولیه $f(t)$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad (۳۸-۲)$$

■ **قضیه مقدار نهایی:** اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، مقدار نهایی $f(t)$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s) \qquad (۳۹-۲)$$

برای درک بهتر این دو قضیه به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲-۱۵:

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ بصورت زیر است، مقدار اولیه و نهایی $g(t)=\frac{df(t)}{dt}$ را محاسبه نمایید:

$$F(s)=\frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

$$G(s)=L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=sF(s)-f(0)$$

$$\to f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}s\left(\frac{2s+1}{s^2+s+1}\right)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{2s^2+s}{s^2+s+1}\right)=2$$

$$\to G(s)=s\left(\frac{2s+1}{s^2+s+1}\right)-2=\frac{2s^2+s}{s^2+s+1}-2=\frac{2s^2+s-2s^2-2s-2}{s^2+s+1}=\frac{-s-2}{s^2+s+1}=\frac{-(s+2)}{s^2+s+1}$$

$$\to g(0)=\lim_{s\to\infty}sG(s)=\lim_{s\to\infty}s\left(\frac{-(s+2)}{s^2+s+1}\right)=\lim_{s\to\infty}\frac{-(s^2+2s)}{s^2+s+1}=-1$$

$$\to \lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{s\to 0}sG(s)=\lim_{s\to 0}s\left(\frac{-(s+2)}{s^2+s+1}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{-(s^2+2s)}{s^2+s+1}=0$$

بخش سوم:

اعداد مختلط، متغیر و تابع مختلط

بخش سوم: اعداد مختلط، متغیر و تابع مختلط

۳-۱- اعداد مختلط:

مجموعه اعداد معروف در ریاضیات عبارتند از:

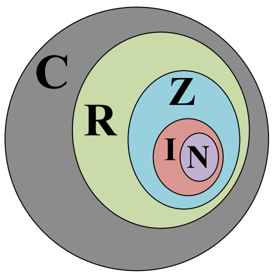
اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

اعداد حسابی: $\mathbf{I}=\{0,1,2,3,\ldots\}$

اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$

اعداد حقیقی: $\mathbb{R}$

اعداد مختلط : $\mathbb{C}$

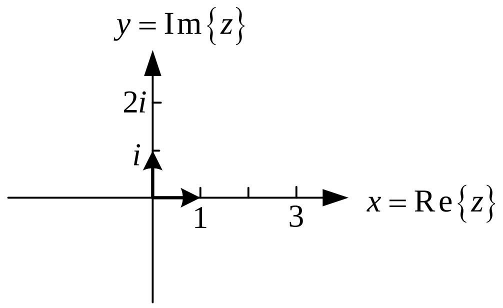


شکل ۳-۱: مجموعه اعداد معروف و ارتباط بین آنها

مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$، تعمیم مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است بطوریکه در این مجموعه اعداد حل معادلاتی نظیر $x^2=-1$ ممکن باشد.

هر عدد مختلط را با $z=x+iy$ نمایش می دهیم که درآن $x,y\in\mathbb{R}$ می باشند. x را قسمت حقیقی z ($x=\mathrm{Re}\{z\}$) و y را قسمت موهومی z ($y=\mathrm{Im}\{z\}$) گویند.

صفحه مختلط یک صفحه مختصات دکارتیست که در آن محور عمودی را محور موهومی و محور افقی را محور حقیقی نامند. بردار پایه محور حقیقی عدد ۱ و بردار پایه محور موهومی عدد i می باشد.



شکل ۳-۲: صفحه اعداد مختلط

نکته بسیار مهم: توجه کنید که قسمت موهومی یک عدد مختلط ضریب i است. بطور مثال در عدد $z=1-2i$ قسمت موهومی -2 می باشد و نه $-2i$.

همچنین طبق تعریف i را[3] با مشخصات زیر عدد موهومی گویند:

$$i=\sqrt{-1} \qquad (۳-۱)$$

$$i^2=-1 \qquad (۳-۲)$$

$$\frac{1}{i}=-i \qquad (۳-۳)$$

---

۳ $x^2+1=0\rightarrow x^2=-1\rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

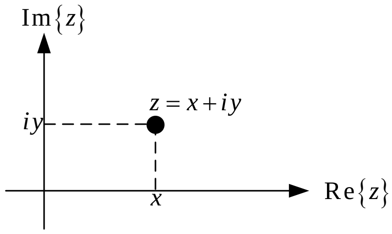
$i=\sqrt{-1}\rightarrow i^2=-1$

$\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{(-1)}=-i$

۳-۱-۱- نمایش یک عدد مختلط:

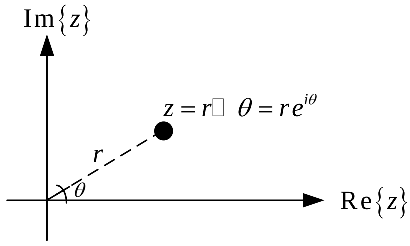
یک عدد به دو روش دکارتی (مربعی) و قطبی نمایش داده می شود:

الف) نمایش یک عدد مختلط به فرم دکارتی: در نمایش یک عدد به فرم دکارتی، عدد مختلط با یک زوج عدد حقیقی نمایش داده می شود که همان بخش های حقیقی و موهومی عدد مختلط هستند:



شکل ۳-۳: نمایش یک عدد مختلط به فرم دکارتی

ب) **نمایش یک عدد مختلط به فرم قطبی:** در نمایش یک عدد به فرم قطبی، عدد مختلط با یک زوج عدد حقیقی نمایش داده می شود که اندازه $\left(r = |z|\right)$ و زاویه عدد مختلط $\left(\theta = \angle z\right)$ می باشند:



شکل ۳-۴: نمایش یک عدد مختلط به فرم قطبی

نکات مهم:

- **در نمایش قطبی عدد مختلط به یکی از دو صورت $z = r\angle\theta$ یا $z = re^{i\theta}$[۴] نمایش داده می شود.**
- **منظور از اندازه (آرگومان) عدد مختلط فاصله آن تا مبدأ مختصات می باشد. اندازه یک عدد مختلط هرگز نمی تواند منفی باشد.**
- **خصوصیات اندازه یک عدد مختلط:**

۱) $|z| \ge 0,\ \ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

۲) $|z_1 z_2| = |z_1| . |z_2|$

۳) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

۴) $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

- **منظور از زاویه عدد مختلط، زاویه عدد با محور حقیقی مثبت می باشد که معمولاً این عدد برای اعداد مختلط روی دایره مثلثاتی در بازه $(-\pi, \pi]$ بیان می گردد.**
- **خصوصیت مهم زاویه یک عدد مختلط:**

$\angle z_1 z_2 = \angle z_1 + \angle z_2$

---

[۴] بر طبق فرمول دآمور داریم:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

۳-۱-۲- تبدیل دو فرم قطبی و دکارتی به یکدیگر:

روابط زیر ارتباط بین دو فرم قطبی و دکارتی به یکدیگر را نمایش می دهند:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (۳-۴)$$

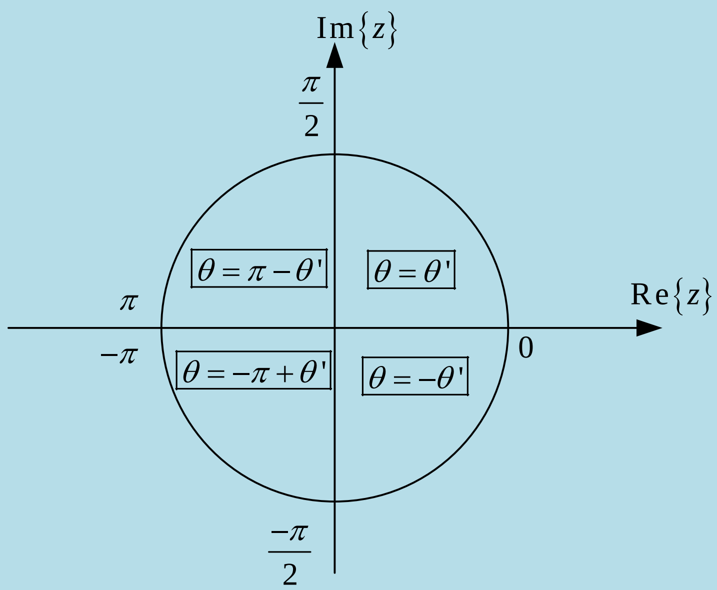
$$\theta=\sin^{-1}(\frac{y}{r})=\cos^{-1}(\frac{x}{r})=\tan^{-1}(\frac{y}{x}) \qquad (۳-۵)$$

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\rightarrow\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \qquad (۳-۶)$$

نکته بسیار مهم: برای تعیین زاویه اعداد، علامت sin و cos در هر ربع از دایره مثلثاتی، بسیار تعیین کننده است. برای اینکه به راحت ترین راه ممکن زاویه صحیح را تعیین کنیم، ابتدا یک زاویه کمکی بصورت

$$\theta'=\tan^{-1}\frac{|y|}{|x|}$$

تعیین نموده و زاویه θ را با توجه به جایگاه عدد در صفحه C بصورت زیر تعیین می کنیم:

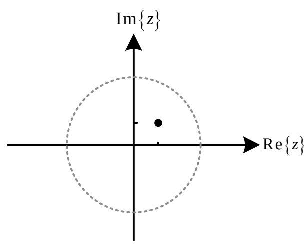


مثال ۳-۱:

اعداد مختلط زیر را به فرم قطبی تبدیل نمایید:

۱) $z=1+i$

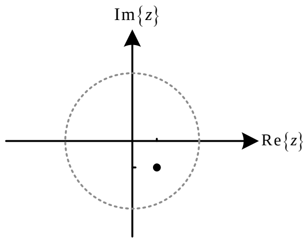
$$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}r=|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\\ \theta'=\theta=\tan^{-1}\frac{1}{1}=45^\circ\end{cases}$$



$$\rightarrow z=\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

۲) $z = 1 - i$

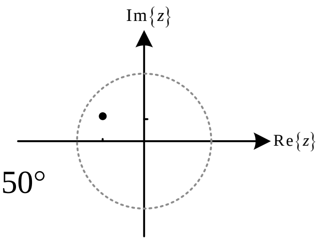
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta' = \tan^{-1}\left|\dfrac{1}{-1}\right| = 45^\circ \rightarrow \theta = -\theta' = -45^\circ \end{cases}$$



$$\rightarrow z = \sqrt{2}\angle -45^\circ$$

۳) $z = -\sqrt{3} + i$

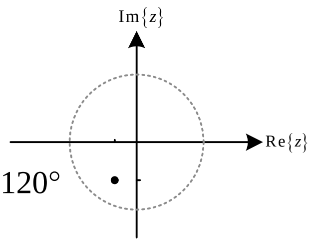
$$\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2 \\ \theta' = \tan^{-1}\left|\dfrac{1}{-\sqrt{3}}\right| = 30^\circ \rightarrow \theta = 180^\circ - \theta' = 150^\circ \end{cases}$$



$$\rightarrow z = 2\angle 150^\circ$$

۴) $z = -1 - \sqrt{3}i$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2 \\ \theta' = \tan^{-1}\left|\dfrac{-\sqrt{3}}{1}\right| = 60^\circ \rightarrow \theta = -180^\circ + \theta' = -120^\circ \end{cases}$$



$$\rightarrow z = 2\angle -120^\circ$$

مثال ۳-۲:

اعداد مختلط زیر را به فرم دکارتی تبدیل نمایید:

۱) $z = \sqrt{2}\angle 30^\circ$

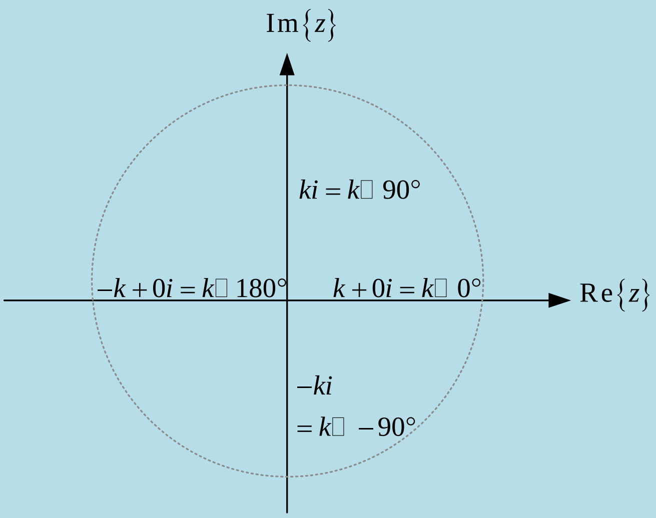
$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = 30^\circ \end{cases} \rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos(30^\circ) + i\sin(30^\circ)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.22 + 0.707i$$

۲) $z = 3\angle -\dfrac{\pi}{3}$

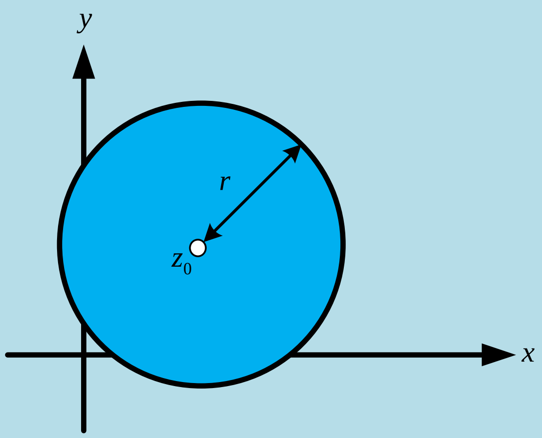
$$\begin{cases} r = 3 \\ \theta = -\dfrac{\pi}{3}^{rad} \end{cases} \rightarrow z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}^\circ\right)\right) = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} = 1.5 - 2.6i$$

نکات مهم:

- **برای تبدیل فرم قطبی به دکارتی (و برعکس) اعدادی که روی محور های اصلی قرار دارند، می توان از شکل زیر کمک گرفت:**



- **رابطه $re^{i\theta}$ با r ثابت و زاویه متغیر در بازه $-\pi \le \theta \le \pi$ معادله یک دایره به شعاع r را نمایش می دهد.**
- **رابطه $re^{i\theta}+z_0$ با r ثابت و زاویه متغیر در بازه $-\pi \le \theta \le \pi$ معادله یک دایره به شعاع r و مرکز z_0 را نمایش می‌دهد.**
- **به روابط زیر توجه کنید:**



$|z-z_0| = r:$ مرز دایره ای به مرکز z_0 و شعاع r

$|z-z_0| < r:$ داخل مرز دایره ای به مرکز z_0 و شعاع r

$|z-z_0| > r:$ خارج مرز دایره ای به مرکز z_0 و شعاع r

$|z-z_0| \le r:$ داخل و روی مرز دایره ای به مرکز z_0 و شعاع r

$|z-z_0| \ge r:$ خارج و روی مرز دایره ای به مرکز z_0 و شعاع r

۳-۱-۳- اعمال جبری روی اعداد مختلط:

الف) تساوی دو عدد مختلط: دو عدد مختلط را در صورتی مساوی گویند که بخش های حقیقی آن دو با هم برابر و بخش‌های موهومی آندو نیز با هم برابر باشند:

$$z_1 = z_2 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{z_1\} = \mathrm{Re}\{z_2\} \\ \mathrm{Im}\{z_1\} = \mathrm{Im}\{z_2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = 3+4i \\ z_2 = 2+4i \\ z_3 = 3+i \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} z_1 \ne z_2 \\ z_1 \ne z_3 \end{matrix}$$

ب) جمع و تفریق اعداد مختلط:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$
$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$
$$\begin{cases} z_1=3+4i \\ z_2=2+4i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=5+8i \\ z_1-z_2=1 \end{cases}$$

ج) ضرب اعداد مختلط:

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+x_1(iy_2)+\underbrace{(iy_1)(iy_2)}_{i^2=-1}+(iy_1)x_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$$
$$z_1z_2=\left(r_1e^{i\theta_1}\right)\left(r_2e^{i\theta_2}\right)=\left(r_1r_2\right)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\begin{cases} z_1=3+4i \\ z_2=2+4i \end{cases} \rightarrow z_1z_2=6+12i+8i-16=-10+20i$$
$$\begin{cases} z_1=4e^{i30^\circ} \\ z_2=1e^{i(-90^\circ)} \end{cases} \rightarrow z_1z_2=\left(4\right)e^{i(-60^\circ)}$$

ویژگی های جمع و ضرب اعداد مختلط:

۱) $z_1+z_2=z_2+z_1$ جابجایی در جمع:

۲) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ شرکت پذیری در جمع:

۳) $z_1z_2=z_2z_1$ جابجایی در ضرب:

۴) $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$ شرکت پذیری در ضرب:

۵) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ توزیع پذیری:

د) مزدوج مختلط یک عدد مختلط: عدد مختلطی که بصورت $x-iy$ یا $re^{-i\theta}$ تعریف گردد را مزدوج $z=x+iy=re^{i\theta}$ و یا $\bar{z}$ نامند. مشخصات $\bar{z}$ بصورت زیر است:

۱) $\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

۲) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right)$

۳) $\overline{(z_1z_2)}=\bar{z}_1\bar{z}_2$

۴) $|\bar{z}|=|z|$

۵) $z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2$

ه) وارون ضربی: اگر $z\neq 0$ باشد، آنگاه عدد مختلطی مثل z^{-1} وجود دارد بطوریکه:

$$zz^{-1}=z^{-1}z=1$$
$$z=x+iy\rightarrow z^{-1}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$
$$z=3+i\rightarrow z^{-1}=\frac{3-i}{3^2+\left(-1\right)^2}=\frac{1}{10}\left(3-i\right)$$

و) تقسیم اعداد مختلط:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\,\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{|x_2-iy_2|^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left(r_1e^{i\theta_1}\right)}{\left(r_2e^{i\theta_2}\right)}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\begin{cases}z_1=3+4i\\ z_2=2+4i\end{cases}\rightarrow\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+4i}{2+4i}\,\frac{2-4i}{2-4i}=\frac{6-12i+8i+16}{2^2+4^2}=\frac{22-4i}{20}=1.1-0.2i$$

$$\begin{cases}z_1=4e^{i30^\circ}\\ z_2=1e^{i(-90^\circ)}\end{cases}\rightarrow\frac{z_1}{z_2}=(4)e^{i(120^\circ)}$$

ز) توان یک عدد مختلط: اگر یک عدد مختلط بصورت زیر نمایش داده شود:

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

توان nام آن با توجه به رابطه دآمور بصورت زیر خواهد بود:

$$z^n=r^ne^{in\theta}=r(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

مثال ۳-۳:

حاصل عبارات زیر را محاسبه نمایید:

۱) $z=(1-i)^{16}$

از مساله دوم مثال ۳-۱ می دانیم که:

$$z_1=1-i\rightarrow z_1=\sqrt{2}\angle -45^\circ\rightarrow\begin{cases}r_1=\sqrt{2}\\ \theta_1=-45^\circ=-\dfrac{\pi}{4}^{rad}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\rightarrow z_1^{16}=\left(\sqrt{2}\angle -45^\circ\right)^{16}=\sqrt{2}^{16}e^{-i16\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{16}e^{-4\pi i}=2^8\left(\underbrace{\cos(-4\pi)}_{=\cos(4\pi)}+i\underbrace{\sin(-4\pi)}_{=0}\right)=2^8(1+0i)=256$$

۲) $z=128(1+i)^{20}$

از مساله اول مثال ۳-۱ می دانیم که:

$$z_1=1+i\rightarrow z_1=\sqrt{2}\angle 45^\circ\rightarrow\begin{cases}r_1=\sqrt{2}\\ \theta_1=45^\circ=\dfrac{\pi}{4}^{rad}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\rightarrow 128z_1^{20}=128\left(\sqrt{2}\angle 45^\circ\right)^{20}=\underbrace{128}_{=2^7}\times\sqrt{2}^{20}e^{i20\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\underbrace{2^7\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{20}}_{2^7\times2^{10}=2^{17}}e^{5\pi i}=2^{17}\left(\underbrace{\cos(5\pi)}_{=-1}+i\underbrace{\sin(5\pi)}_{=0}\right)=-2^{17}$$

ح) ریشه nام یک عدد مختلط: اگر یک عدد مختلط بصورت زیر نمایش داده شود:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

ریشه nام آن با توجه به رابطه دآمور n عدد خواهد بود که بصورت زیر محاسبه می گردند:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = r\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

مثال ۳-۴:

حاصل عبارت زیر را محاسبه نمایید:

$$z^4 - 1 = i$$

$$\rightarrow z^4 = 1+i \rightarrow z = \sqrt[4]{1+i} = (1+i)^{\frac{1}{4}}$$

$$1+i = \sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$$

$$z = (1+i)^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\right)$$

بنابراین:

$$z = \begin{cases} k=0 \rightarrow \quad z_1 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{4}\right)\right) = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right) = 1.06 + 0.2i \\ k=1 \rightarrow \quad z_2 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right) = -0.2 + 1.06i \\ k=2 \quad z_3 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{16}\right)\right) = -1.06 - 0.2i \\ k=3 \quad z_4 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\left(\frac{25\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{16}\right)\right) = 0.2 - 1.06i \end{cases}$$

۳-۲-متغیر و تابع مختلط:

اگر S مجموعه ای از اعداد مختلط باشد، منظور از متغیر مختلط، هر عضو دلخواه از این مجموعه خواهد بود. تابع f که بر S تعریف شده عبارت از قاعده ای است که به هر z در S یک عدد مختلط در W نسبت می دهد:

$$\begin{cases} z = (x+iy) \in S \\ f(z) = (u+iv) \in W \end{cases} \rightarrow f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

مجموعه S را دامنه و مجموعه W را برد مقادیر تابع می نامیم.

نکته: دو خصوصیت مهم توابع مختلط که این توابع را از توابع حقیقی متمایز می کند عبارتند از:

- **توابع مختلط بر خلاف توابع حقیقی می توانند چند مقداری باشند.**
- **تابع مختلط، خود یک تابع دوبعدی است. متغیر مختلط نیز دو بعدی است. بنابراین برای نمایش این دو در یک مکان،احتیاج به یک دستگاه مختصات چهار بعدی داریم که در صفحه کاغذ دوبعدی امکان پذیر نیست. برای این منظور دو صفحه مختصات جداگانه یکی برای متغیر و دیگری برای تابع رسم می نمایند.**

مثال ۳-۵:

قسمت های حقیقی و موهومی توابع زیر را مشخص نمایید:

۱) $f(z)=iz^2$

به منظور تفکیک یک تابع به بخشهای حقیقی و موهومی ابتدا z را با $x+iy$ جایگزین می کنیم و سپس تابع را ساده می کنیم:

$$f(z)=iz^2=i(x+iy)^2=i(x^2+2ixy-y^2)=(ix^2-2xy-iy^2)$$

بنابراین:

$$f(z)=-2xy+i(x^2-y^2)\rightarrow\begin{cases}u(x,y)=-2xy\\ v(x,y)=x^2-y^2\end{cases}$$

۲) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im}\{z^2\}}{|z|^2}$

$$f(z)=\frac{\operatorname{Im}\{z^2\}}{|z|^2}=\frac{\operatorname{Im}\{x^2+2ixy-y^2\}}{x^2+y^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

بنابراین:

$$f(z)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\rightarrow\begin{cases}u(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\\ v(x,y)=0\end{cases}$$

۳-۲-۱- حد یک تابع مختلط:

فرض کنید که تابع $f(z)$ یک تابع مختلط از متغیر مختلط z باشد، آنگاه تابع $f(z)$ در $z=z_0$ دارای حد l است یعنی:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=l$$

اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon>0$ عدد مختلط ای $\delta>0$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$0<|z-z_0|<\delta\rightarrow|f(z)-l|<\varepsilon$$

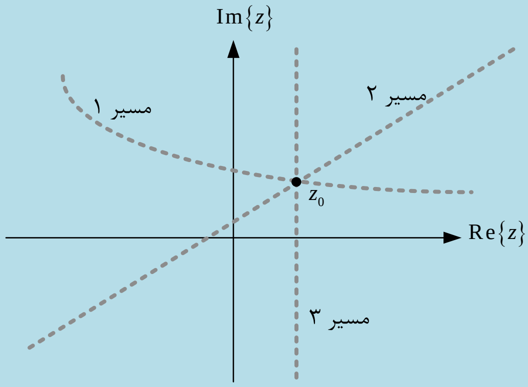
برای یک تابع مختلط، حد بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)+i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y) \qquad (۳-۷)$$

نکات:

- **حد تابع در صورت وجود منحصر به فرد می باشد.**

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=l$ لزوماً به معنای $f(z_0)=l$ نیست.
- حد تابع مختلط در صورتی برقرار است که هر دو حد $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$ وجود داشته باشند.
- برای نشان دادن اینکه تابعی در یک نقطه مثل $z=z_0$ حد ندارد، حد تابع را از مسیرهای مختلف منتهی به z_0 بررسی می کنیم، اگر دو مسیر مختلف حدی نابرابر داشته باشند، تابع در $z=z_0$ حد ندارد.



مسیر انتخابی، می تواند هر منحنی دلخواه که از نقطه $z=z_0$ می گذرد باشد.

- خصوصیات حد تابع: اگر داشته باشیم:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\ell,\quad \lim_{z\to z_0} g(z)=M$$

آنگاه:

$$۱)\ \lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=\ell+M$$

$$۲)\ \lim_{z\to z_0}\left[f(z).g(z)\right]=\ell.M$$

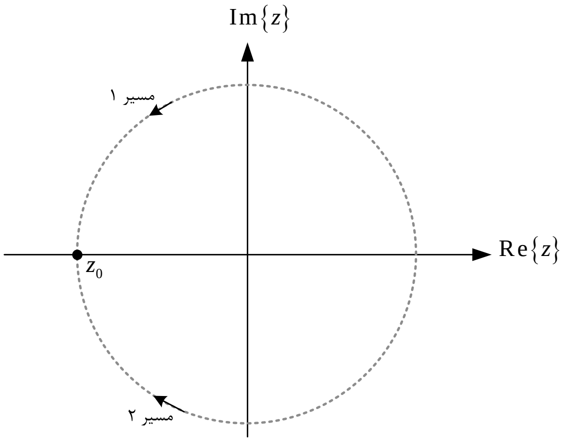
$$۳)\ \lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{\ell}{M}\ ,M\neq 0$$

مثال ۳-۶:

آیا تابع $f(z)$ روی محور حقیقی منفی حد دارد؟

$$f(z)=\square\, z$$

دو مسیر برای محاسبه حد انتخاب می کنیم:



مسیر ۱ حرکت روی دایره مثلثاتی در جهت پاد ساعتگرد:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\pi$$

مسیر ۲ حرکت روی دایره مثلثاتی در جهت ساعتگرد:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=-\pi$$

بنابراین تابع $f(z)$ روی محور حقیقی منفی حد ندارد.

۳-۲-۲- پیوستگی یک تابع مختلط:

تابع $f(z)$ در $z=z_0$ پیوسته است اگر:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

نکته: تابعی که حد نداشته باشد، قطعاً پیوسته نیست.

مثال ۳-۷:

نشان دهید تابع $f(z)$ در مبدأ پیوسته نیست.

۱) $f(z)=\begin{cases}\bar{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\bar{z}=0\\ f(0)=1\end{cases}\to \lim_{z\to 0} f(z)\neq f(0)$$

بنابراین تابع در مبدأ پیوسته نیست.

۲) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Im}\{z^2\}}{|z|^2} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$

از مساله دوم مثال ۳-۵ می دانیم که:

$$f(z)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

بنابراین:

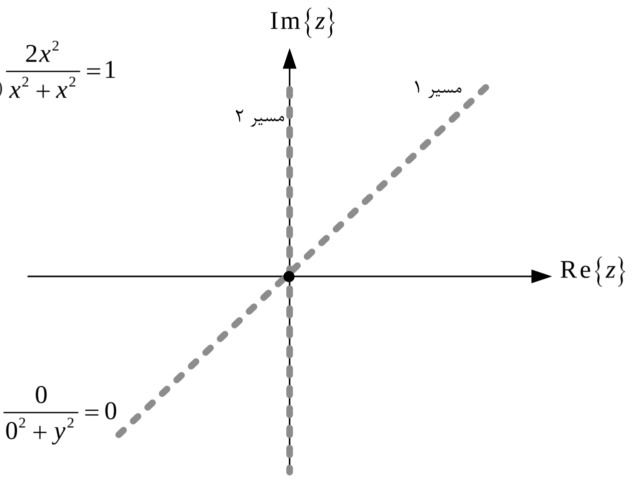
$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} =$$

مسیر ۱: $x = y$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$$

مسیر ۲: $x = 0$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{0^2+y^2} = 0$$



تابع در $z = 0$ حد ندارد؛ بنابراین پیوسته هم نخواهد بود.

نکته: توابع چند جمله ای همواره پیوسته هستند.

۳-۲-۳- مشتق یک تابع مختلط:

اگر تابع $f(z)$ در دامنه $D \subset \mathbb{C}$ پیوسته باشد، آنگاه مشتق $f(z)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (۳-۸)$$

مشتق $f(z)$ در نقطه z_0 نیز بصورت زیر تعریف می گردد:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (۳-۹)$$

نکات:

- **تابعی که در تمام نقاط صفحه مختلط مشتق پذیر باشد را تابع تام گویند.**
- **اگر تابعی در نقطه $z = z_0$ مشتق پذیر باشد، آن تابع را در $z = z_0$ تحلیلی گویند.**
- **نقاطی را که تابع در آن مشتق پذیر نمی باشد را نقاط تکین تابع نامند.**
- **خصوصیات مشتق تابع:**

۱) $\left[f(z) \pm g(z)\right]' = f'(z) \pm g'(z)$

۲) $\left[f(z).g(z)\right]' = f'(z).g(z) + f(z).g'(z)$

۳) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

۴) $\left[f(g(z))\right]' = g'(z).\left[f'(g(z))\right]$

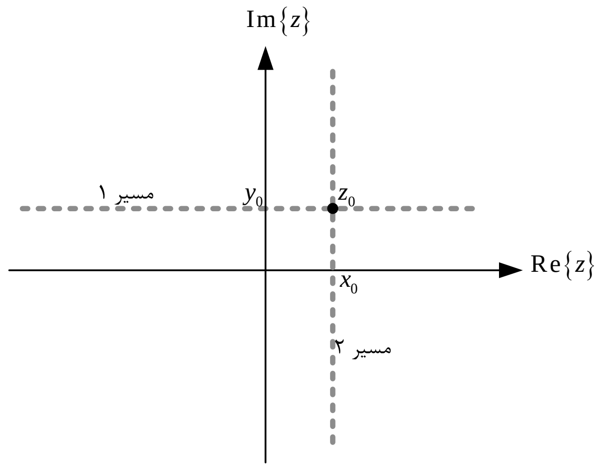
به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۳-۸:

مشتق پذیری توابع زیر را بررسی نمایید:

۱) $f(z) = \bar{z}$

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0}$$



$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-iy)-(x_0-iy_0)}{(x+iy)-(x_0+iy_0)}=$$

مسیر ۱: $y=y_0$

$$\lim_{(x,y_0)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-iy_0)-(x_0-iy_0)}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)}=\lim_{(x,y_0)\to(x_0,y_0)}\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)}=1$$

مسیر ۲: $x=x_0$

$$\lim_{(x_0,y)\to(x_0,y_0)}\frac{(x_0-iy)-(x_0-iy_0)}{(x_0+iy)-(x_0+iy_0)}=\lim_{(x,y_0)\to(x_0,y_0)}\frac{-(y-y_0)}{(y-y_0)}=-1$$

بنابراین تابع مشتق پذیر نمی باشد.

۲) $f(z)=z+(1+i)$

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z+(1+i)-z_0-(1+i)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{z-z_0}=1$$

مثال ۳-۹:

مشتق پذیری توابع زیر را در $z_0=0$ بررسی نمایید:

۱) $f(z)=z\overline{z}$

$$f'(0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{\cancel{z}\,\overline{z}-0}{\cancel{z}}=\lim_{z\to 0}\overline{z}=0$$

۲) $f(z)=|z|^2$

$$f'(0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2-0}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cancel{z}\,\overline{z}-0}{\cancel{z}}=\lim_{z\to 0}\overline{z}=0$$

■ معادلات کوشی - ریمان:

اگر داشته باشیم:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

آنگاه اگر z در امتداد خط $y=y_0$ به سمت z_0 میل کند داریم:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{[u(x,y_0)+iv(x,y_0)]-[u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)]}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{[u(x,y_0)-u(x_0,y_0)]}{x-x_0}+i\lim_{x\to x_0}\frac{[v(x,y_0)-v(x_0,y_0)]}{x-x_0}$$
$$\to f'(z_0)=\frac{\delta u}{\delta x}+i\frac{\delta v}{\delta x} \qquad (۱۰-۳)$$

و یا اگر z در امتداد خط $x=x_0$ به سمت z_0 میل کند داریم:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\frac{1}{i}\lim_{y\to y_0}\frac{[u(x_0,y)-u(x_0,y_0)]}{y-y_0}+\frac{1}{i}\times i\times\lim_{y\to y_0}\frac{[v(x_0,y)-v(x_0,y_0)]}{y-y_0}$$
$$f'(z_0)=\frac{\delta v}{\delta y}-i\frac{\delta u}{\delta y} \qquad (۱۱-۳)$$

خواهد بود. برای اینکه تابع مشتق پذیر باشد، باید دو معادله ۳-۱۰ و ۳-۱۱ برابر باشند بنابراین:

$$\to f'(z_0)=\frac{\delta u}{\delta x}+i\frac{\delta v}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta y}-i\frac{\delta u}{\delta y}$$
$$\to\begin{cases}\dfrac{\delta u}{\delta x}=\dfrac{\delta v}{\delta y}\\[2mm] \dfrac{\delta v}{\delta x}=-\dfrac{\delta u}{\delta y}\end{cases} \qquad (۱۲-۳)$$

که این معادلات را معادلات کوشی ریمان گویند. اگر بجای فرم دکارتی، فرم قطبی بکار برده شود، داریم:

$$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$$
$$f'(z)=\left(\frac{\delta u}{\delta r}+i\frac{\delta v}{\delta r}\right)(\cos\theta-i\sin\theta)=\left(\frac{\delta v}{\delta\theta}-i\frac{\delta u}{\delta r}\right)\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{r}$$
$$\to\begin{cases}\dfrac{\delta u}{\delta r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\delta v}{\delta\theta}\\[2mm] \dfrac{\delta v}{\delta r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\delta u}{\delta\theta}\end{cases} \qquad (۱۳-۳)$$

■ **قضیه:**

تابع $f'(z_0)=u(x,y)+iv(x,y)$ در $z=z_0$ مشتق پذیر است اگر:

۱- در z_0 معادلات کوشی ریمان برقرار باشند.

۲- در همسایگی z_0 مشتقات جزئی پیوسته $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ وجود داشته باشد.

مثال ۳-۱۰:

مشتق پذیری توابع زیر را در کل صفحه مختلط بررسی نمایید:

۱) $f(z)=z\operatorname{Re}\{z\}$

برای استفاده از قضیه کوشی ریمان ابتدا باید تابع را به فرم دکارتی تبدیل نماییم:

$$f(z)=z\operatorname{Re}\{z\}=(x+iy)\operatorname{Re}\{x+iy\}=(x+iy)x=x^2+ixy$$

$$\rightarrow\begin{cases}u(x,y)=x^2\\ v(x,y)=xy\end{cases}$$

اکنون شرایط قضیه فوق را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\delta u}{\delta x}=2x\\ \dfrac{\delta u}{\delta y}=0\\ \dfrac{\delta v}{\delta y}=x\\ \dfrac{\delta v}{\delta x}=y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\delta u}{\delta x}\neq\dfrac{\delta v}{\delta y}\\ \dfrac{\delta v}{\delta x}\neq-\dfrac{\delta u}{\delta y}\end{cases}$$

اولین شرط قضیه کوشی ریمان برقرار نیست پس تابع بطور کل مشتق پذیر نمی باشد. اکنون بررسی می کنیم که آیا در نقاط خاصی شرایط مشتق پذیری برقرار است یا خیر؟

$$\begin{cases}\dfrac{\delta u}{\delta x}=\dfrac{\delta v}{\delta y}\rightarrow 2x=x\rightarrow x=0\\ \dfrac{\delta v}{\delta x}=-\dfrac{\delta u}{\delta y}\rightarrow y=0\end{cases}\rightarrow z=x+iy=0+0i=0$$

در $z=0$ معادلات کوشی ریمان برقرار می باشند و در همسایگی آن مشتقات جزئی پیوسته $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$، $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$، $\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$ و $\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ وجود دارند. بنابراین $f(z)$ تنها در $z=0$ مشتق پذیر می باشد.

۲) $f(z)=\left(3x^2y+2x^2-y^3-2y^2\right)+i\left(3xy^2+4xy-x^3\right)$

$$\rightarrow\begin{cases}u(x,y)=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2\\ v(x,y)=3xy^2+4xy-x^3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\delta u}{\delta x}=6xy+4x\\ \dfrac{\delta u}{\delta y}=3x^2-3y^2-4y\\ \dfrac{\delta v}{\delta y}=6xy+4x\\ \dfrac{\delta v}{\delta x}=3y^2+4y-3x^2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\delta u}{\delta x}=\dfrac{\delta v}{\delta y}\\ \dfrac{\delta v}{\delta x}=-\dfrac{\delta u}{\delta y}\end{cases}$$

معادلات کوشی ریمان برقرار می باشند و در همسایگی آن مشتقات جزئی پیوسته $\dfrac{\partial u}{\partial x}$، $\dfrac{\partial u}{\partial y}$، $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ وجود دارند زیرا هر چهار مشتق جزئی توابعی چند جمله ای بر حسب x و y می باشند و می دانیم که توابع چند جمله ای همواره مشتق پذیرند. بنابراین

$f(z)$ مشتق پذیر می باشد.

■ **قضیه:**

هر تابع حقیقی $u(x,y)$ در حوزه D را که دارای مشتقات مرتبه اول و دوم بوده و در معادله لاپلاس زیر صدق کند یک تابع همساز گویند:

$$\nabla^2 u=\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=0 \qquad (۱۴-۳)$$

برای تابع مختلط $u(r,\theta)$ با فرم قطبی داریم:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta r}+\frac{\delta^2 u}{\delta \theta^2}=0 \qquad (۱۵-۳)$$

■ **قضیه:**

۱- اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در حوزه D تحلیلی باشد آنگاه توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ همسازند.

۲- اگر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در حوزه D همساز باشند و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها در معادله کوشی ریمان صدق کند، گوییم $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y)$ می باشد.

۳- اگر $v(x,y)$ یک همساز $u(x,y)$ باشد لزوماً $u(x,y)$ مزدوج همساز $v(x,y)$ نیست.

۴- مزدوج همساز یک تابع را می توان از معالات کوشی ریمان بدست آورد.

مثال ۳-۱۱:

نشان دهید تابع $u(x,y)$ همساز است. تابع مزدوج همساز $v(x,y)$ آن را بیابید.

۱) $u(x,y)=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2$

با استفاده از قضیه همساز بودن یک تابع داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\delta u}{\delta x}=6xy+4x\rightarrow\dfrac{\delta^2 u}{\delta x^2}=6y+4\\[2mm]\dfrac{\delta u}{\delta y}=3x^2-3y^2-4y\rightarrow\dfrac{\delta^2 u}{\delta y^2}=-6y-4\end{cases}\rightarrow\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=6y+4-6xy-4=0$$

بنابراین $u(x,y)$ همساز است. اکنون با استفاده از قضیه کوشی ریمان داریم:

$$\frac{\delta u}{\delta x}=6xy+4x=\frac{\delta v}{\delta y}\rightarrow v(x,y)=\int(6xy+4x)dy=3xy^2+4xy+h(x)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\delta v}{\delta x}=3y^2+4y+h'(x)\\[2mm]\dfrac{\delta u}{\delta y}=3x^2-3y^2-4y\end{cases}\xrightarrow{\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{\delta v}{\delta x}}\cancel{3y^2}+\cancel{4y}+h'(x)=-\left(3x^2-3y^2-4y\right)=-3x^2+\cancel{3y^2}+\cancel{4y}$$

$$\rightarrow h'(x)=-3x^2\rightarrow h(x)=-x^3+C$$

$$\rightarrow v(x,y)=3xy^2+4xy-x^3+C$$

۲) $u(x,y)=x^2-y^2$

با استفاده از قضیه همساز بودن یک تابع داریم:

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x}=2x \to \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=2 \\ \frac{\delta u}{\delta y}=-2y \to \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=-2 \end{cases} \to \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=2-2=0$$

بنابراین $u(x,y)$ همساز است. اکنون با استفاده از قضیه کوشی ریمان داریم:

$$\frac{\delta u}{\delta x}=2x=\frac{\delta v}{\delta y} \to v(x,y)=\int(2x)dy=2xy+h(x)$$

$$\begin{cases} \frac{\delta v}{\delta x}=2y+h'(x) \\ \frac{\delta u}{\delta y}=-2y \end{cases} \xrightarrow{\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{\delta v}{\delta x}} \cancel{2y}+h'(x)=-(-2y)=\cancel{2y} \to h'(x)=0 \to h(x)=C$$

$$\to v(x,y)=2xy+C$$

۳-۳-توابع مختلط:

از آنجا که ممکن است به علت چند مقداری بودن این توابع در صفحه مختلط برخی روابط حاصل از توابع حقیقی برای توابع مختلط غیر جبری برقرار نباشند یا تحت شرایطی بر قرار باشند. بنابراین در این فصل به بررسی توابع غیر جبری مقدماتی در حوزه مختلط می پردازیم.

۳-۳-۱- توابع نمایی مختلط:

تابع نمایی را که بصورت e^z و یا $\exp(z)$ نشان داده می شود را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=e^x\left(\cos(y)+i\sin(y)\right) \qquad (۳-۱۶)$$

اکنون با استفاده از قضیه کوشی ریمان مشتق پذیری آن را بررسی می کنیم:

$$\to \begin{cases} u(x,y)=e^x\cos(y) \\ v(x,y)=e^x\sin(y) \end{cases} \to \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin(y) \end{cases}$$

بنابراین این تابع در هر نقطه از صفحه مختلط مشتق پذیر است و یک تابع تحلیلی و تام بحساب می آید.

نکات:

خصوصیات تابع نمایی بصورت زیر می باشد:

۱) $\frac{d}{dz}e^z=e^z$

۲) $e^{z_1}.e^{z_2}=e^{(z_1+z_2)}$

۳) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{(z_1 - z_2)} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 0, z_2 = z \rightarrow \frac{1}{e^z} = e^{-z} \\ z_1 = z_2 \rightarrow e^0 = 1 \end{cases}$

۴) $e^{(z_1 + 2\pi i)} = e^{z}$

۵) $e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}$

۶) $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \rightarrow e^{i\pi} = -1$

بنابراین تابع نمایی مختلط می تواند مقادیر منفی هم داشته باشد.

مثال ۳-۱۲:

معادله زیر را حل نمایید.

$e^z = -4$

با استفاده از رابطه ۳-۱۶ داریم:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right) = -4 + 0i$$

$$\rightarrow \begin{cases} e^x\cos(y) = -4 \\ e^x\sin(y) = 0 \end{cases}$$

از رابطه دوم شروع می کنیم:

$$e^x\sin(y) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \quad \text{غ م} \\ \sin(y) = 0 \rightarrow y = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots \end{cases}$$

اکنون به سراغ رابطه اول می رویم:

$$e^x\cos(y) = -4 \xrightarrow[y=k\pi]{e^x > 0} \begin{cases} e^x = 4 \\ \cos(y) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \ln(4) \\ y = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \end{cases}$$

$$\rightarrow z = \ln(4) + i(2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

۳-۳-۲- توابع هیپربولیک مختلط:

توابع هیپربولیک از متغیر های مختلط همانند متغیر حقیقی[۵] تعریف می شوند یعنی:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{۳-۱۷}$$

---

[۵] توابع هیپربولیک حقیقی بصورت زیر تعریف می گردند:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

دو خصوصیت قابل توجه این دو تابع نیز بصورت

$$\sinh(0) = 0$$

$$\cosh(x) \geq 1$$

می باشد.

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$ (۱۸-۳)

$$\tanh(z)=\frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$ (۱۹-۳)

نکات:

- از آنجا که توابع نمایی مختلط توابعی تام می باشند پس $\sinh(z)$، $\cosh(z)$ و $\tanh(z)$ نیز تحلیل هستند. بنابراین:

۱) $\frac{d}{dz}\sinh(z)=\cosh(z)$

۲) $\frac{d}{dz}\cosh(z)=\sinh(z)$

۳) $\frac{d}{dz}\tanh(z)=\operatorname{sech}^2(z)$

- خصوصیات مهم توابع هیپربولیک مختلط:

۱) $\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1$

۲) $\sinh(z_1\pm z_2)=\sinh(z_1)\cosh(z_2)\pm\sinh(z_2)\cosh(z_1)$

۳) $\cosh(z_1\pm z_2)=\cosh(z_1)\cosh(z_2)\mp\sinh(z_1)\sinh(z_2)$

۴) $\cosh(z)=\cosh(x)\cos(y)+i\sinh(x)\sin(y)$

۵) $\sinh(z)=\sinh(x)\cos(y)+i\cosh(x)\sin(y)$

۶) $\cosh(z)=\cos(iz)$

۷) $\sinh(z)=-i\sin(iz)$

۳-۳-۳- توابع مثلثاتی مختلط:

توابع مثلثاتی مختلط با توجه به فرمول اویلر بصورت زیر بدست می آیند:

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$ (۲۰-۳)

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$ (۲۱-۳)

$$\tan(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$ (۲۲-۳)

$$\cot(z)=\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$ (۲۳-۳)

نکات:

- از آنجا که توابع نمایی مختلط توابعی تام می باشند پس $\sin(z)$ و $\cos(z)$ نیز تحلیلی هستند. بنابراین:

۱) $\frac{d}{dz}\sin(z)=\cos(z)$

۲) $\frac{d}{dz}\cos(z)=-\sin(z)$

- **خصوصیات مهم توابع مثلثاتی مختلط:**

۱) $\cos^2(z)+\sin^2(z)=1$

۲) $\sin(z_1\pm z_2)=\sin(z_1)\cos(z_2)\pm\sin(z_2)\cos(z_1)$

۳) $\cos(z_1\pm z_2)=\cos(z_1)\cos(z_2)\mp\sin(z_1)\sin(z_2)$

۴) $\cos(z)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$

۵) $\sin(z)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$

۶) $\cos(i\theta)=\cosh(\theta)$

۷) $\sin(i\theta)=i\sinh(\theta)$

- **توابع $\sin(z)$ و $\cos(z)$ کراندار نیستند.**
- **تابع $\tan(z)$ در تمام صفحه تحلیلی بجز نقاط تکین زیر تحلیلی است:**

$$z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

و مشتق آن

$$\frac{d}{dz}\tan(z)=\sec^2(z)$$

خواهد بود.

- **همانند توابع حقیقی، توابع مثلثاتی مختلط نیز دارای خاصیت تناوب هستند:**

۱) $\sin(z+\pi)=-\sin z \quad \sin(z+2\pi)=\sin z\to T=2\pi$

۲) $\cos(z+\pi)=-\cos z \quad \cos(z+2\pi)=\cos z\to T=2\pi$

۳) $\tan(z+\pi)=\tan z \quad \tan(z+2\pi)=\tan z\to T=\pi$

مثال ۳-۱۳:

نشان دهید تابع زیر تحلیلی نیست.

$$f(z)=\cos(\bar{z})$$

$$f(z)=\cos(\bar{z})=\cos(x-iy)=\cos(x)\cosh(y)+i\sin(x)\sinh(y)$$

$$\to\begin{cases}u(x,y)=\cos(x)\cosh(y)\\ v(x,y)=\sin(x)\sinh(y)\end{cases}\to\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\sin(x)\cosh(y)\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\sin(x)\cosh(y)\end{cases}\neq$$

روابط کوشی ریمان برقرار نیست بنابراین تابع مشتق پذیر نیست.

مثال ۳-۱۴:

معادله زیر را حل نمایید.

$$\sin z=16$$

$$\sin(z)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)=16+0i$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin(x)\cosh(y)=16 \\ \cos(x)\sinh(y)=0 \end{cases}$$

از رابطه دوم شروع می کنیم:

$$\cos(x)\sinh(y)=0 \rightarrow \begin{cases} \cos(x)=0 \rightarrow x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2} \quad ,k=0,\pm1,\pm2,\dots \\ \sinh(y)=0 \rightarrow y=0 \end{cases}$$

اکنون به سراغ رابطه اول می رویم:

$$\sin(x)\cosh(y)=16 \rightarrow \begin{cases} \sin(x)=16 \quad \text{غ م} \\ \cosh(y)=16 \rightarrow y=\cosh^{-1}(16) \end{cases}$$

$$\rightarrow z=\frac{(2k+1)\pi}{2}+i\cosh^{-1}(16) \ ,k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

۳-۳-۴- توابع لگاریتمی مختلط:

تابع لگاریتمی W در حوزه مختلط بصورت زیر تعریف می شود:

$$w=\ln(z)=\ln|z|+i\square\, z \qquad (۲۴-۳)$$

$$\ln|z|e^{i\square z}=\ln|z|+\ln e^{i\square z}=\ln|z|+i\square\, z$$

$$\rightarrow w=u+iv=\ln|z|+i\square\, z \rightarrow \begin{cases} u=\ln|z| \\ v=\square\, z \end{cases}$$

نکات:

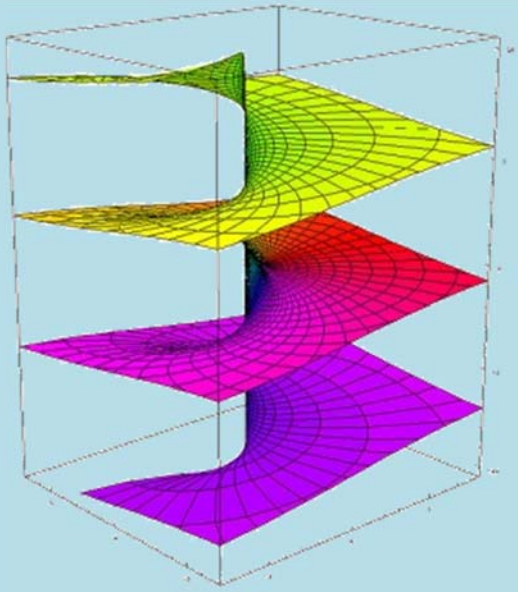
- **وارون تابع لگاریتمی w تابع نمایی $w=e^{w}$ است.**
- **تابع لگاریتمی w یک تابع چند مقداری است زیرا تابع z $\square$ یک تابع چند مقداری است:**

$$\square\, z=\theta+2k\pi$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\dots$$
$$-\pi<\theta<\pi$$

- **مقدار اصلی لگاریتم را با $Ln(z)$ نمایش داده و به ازای $k=0$ بدست می آورند:**

$$Ln(z)=\ln|z|+i\theta$$

- **در توابع چند مقداری که بر اساس زاویه تعریف می گردند، صفحاتی به نام صفحات ریمان دوایر مثلثاتی ای را تشکیل می دهند که هر کدام در یک بازه با طول 2π قرار دارند. به هر کدام از این صفحات یک شاخه گویند. شاخه اصلی در واقع محدوده زاویه ای $-\pi<\theta\le\pi$ را در بر می گیرد.**



صفحات ریمان تابع لگاریتم

- **در حالت کلی تر اگر θ بصورت $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ محدود شود که α در آن یک ثابت دلخواه باشد تابع زیر یک تابع تک مقداری و پیوسته در کل ناحیه D می باشد:**

$$Lnz = \ln|z| + i\theta, \quad r > 0, \quad \alpha < \theta \le \alpha + 2\pi$$

تابع تک مقداری $w = Ln(z)$ را که محدود به ناحیه D است، یک شاخه از $\ln(z)$ که آنرا شاخه اصلی می نامیم تعریف می شود.

- **در توابع لگاریتمی مختلط به ازای همه مقادیر z روابط زیر بر قرار نمی باشند:**

۱) $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$

۲) $\ln(z^n) = n\ln(z)$

بنابراین تابع لگاریتمی بصورت کلی زیر تعریف می گردد:

$$ln(z) = \ln|z| + i\theta + 2k\pi i, \ k = 1, 2, 3 \qquad (۳-۲۵)$$

مثال ۳-۱۵:

مقدار اصلی تابع زیر را محاسبه نمایید.

$$f(z) = Ln(-1)$$

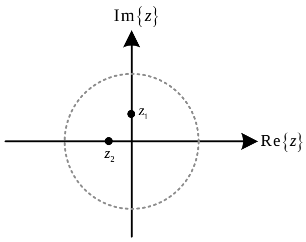
$$Ln(z) = \ln|z| + i\theta = \ln(1) + i\pi = i\pi$$

مثال ۳-۱۶:

نشان دهید:

۱) $\begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = -1 \end{cases} \rightarrow Ln(z_1 z_2) \neq Ln(z_1) + Ln(z_2)$

$$z_1 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{(0)^2 + 1^2} = 1 \\ \theta_1 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



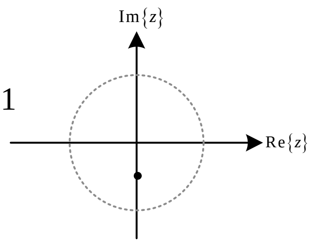
$$z_2 : \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_2 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 \\ \theta_2 = \pi \end{cases}$$

$$Ln(z_1) = \ln(r_1) + i\theta_1 = \ln(1) + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$Ln(z_2) = \ln(r_2) + i\theta_2 = \ln(1) + i\pi = i\pi$$

$$Ln(z_1 z_2) = Ln(-i)$$

$$z_1 z_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1 \\ \theta = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



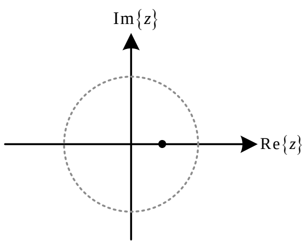
$$Ln(z_1 z_2) = \ln(-i) = \ln(1) - i\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} i$$

$$\rightarrow Ln(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{2} i \neq Ln(z_1) + Ln(z_2) = \frac{\pi}{2} i + i\pi = \frac{3\pi}{2} i$$

۲) $z = -1 \rightarrow Ln(z^2) \neq 2Ln(z)$

$$Ln(z^2) = Ln(1)$$

$$z : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + (0)^2} = 1 \\ \theta = 0 \end{cases}$$



$$Ln(z^2) = Ln(1) = \ln(1) + i \times 0 = 0$$

$$\rightarrow Ln(z^2) = 0 \neq 2Ln(z) = 2i\pi$$

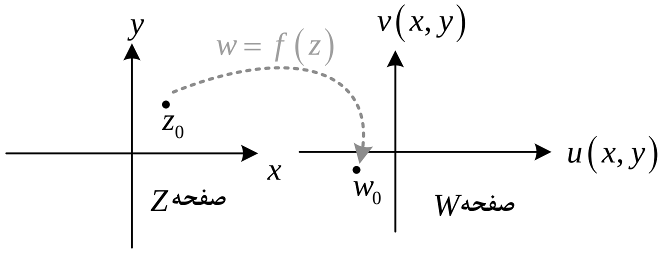
بخش چهارم:

نگاشت مختلط

بخش چهارم: نگاشت مختلط:

۴-۱- مقدمه:

فرض کنید تابع $w=f\left(z\right)$ یک تابع تک مقداری از متغیر z در صفحه مختلط باشد. بنابراین هر نقطه ای مانند z_0 در صفحه مختلط Z متناظر با یک نقطه w_0 در صفحه مختلط W خواهد بود. ارتباط بین دو صفحه را که با رابطه $w=f\left(z\right)$ ایجاد می شود نگاشت مختلط گویند.



شکل ۴-۱: نگاشت بین دو صفحه Z و W

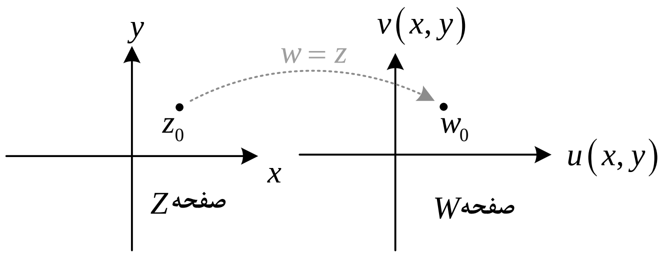
اکنون با استفاده از توابعی که در فصل سوم معرفی شد به بررسی نگاشت های مختلف می پردازیم:

۴-۲- نگاشت خطی:

نگاشت خطی که دارای تابع $w=az+b$ می باشد دارای حالات خاص متعددی است که ابتدا به معرفی آنها می پردازیم:

الف) نگاشت همانی:

نگاشت همانی با تابع $w=z$ هر نقطه از صفحه مختلط Z را به همان نقطه در صفحه مختلط W می نگارد.



شکل ۴-۲: نگاشت همانی

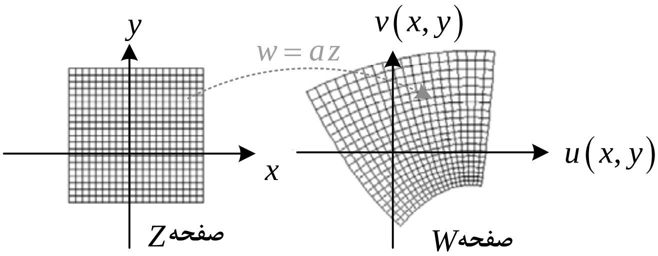
ب) نگاشت دوران و تغییر اندازه:

نگاشت دوران و تغییر اندازه با تابع $w=az$ که در آن a یک عدد مختلط است، بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{cases} w=az \\ a=\left|a\right|e^{i\theta_a} \end{cases}$$

$$\rightarrow w=\left|a\right|\left|z\right|e^{i(\theta_a+\theta_z)} \qquad (۴-۱)$$

بنابراین با نگاشت $w=az$ هر نقطه از صفحه مختلط Z، در صفحه مختلط W به اندازه $\left|a\right|$ تغییر اندازه داشته و به اندازه θ_a دوران خواهد داشت.



شکل ۴-۳: نگاشت دوران و تغییر اندازه

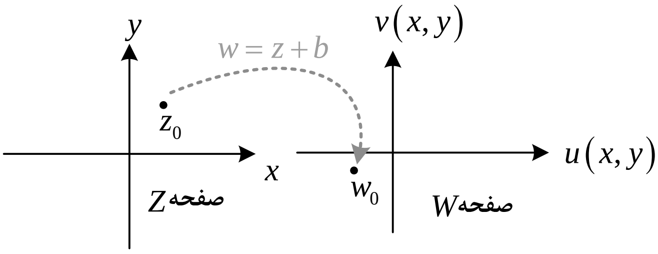
ج) نگاشت انتقال:

نگاشت انتقال با تابع $w=z+b$ که در آن b یک عدد مختلط است، بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{cases} w=z+b \\ b=x_b+iy_b \end{cases}$$

$$\rightarrow w=(x+x_b)+i(y+y_b) \qquad (۲-۴)$$

بنابراین با نگاشت $w=z+b$ هر نقطه از صفحه مختلط Z، در صفحه مختلط W روی محور حقیقی به اندازه x_b و روی محور موهومی به اندازه y_b جابجا خواهد شد.



شکل ۴-۴: نگاشت انتقال

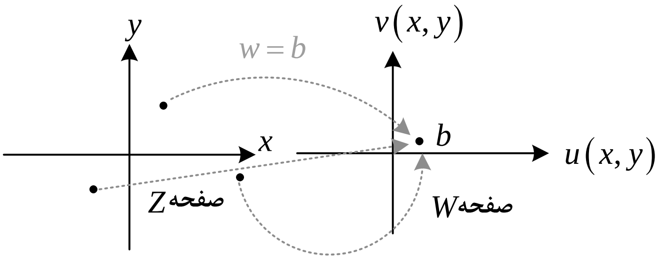
د) نگاشت ثابت:

نگاشت ثابت با تابع $w=b$ که در آن b یک عدد مختلط است، بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{cases} w=b \\ b=x_b+iy_b \end{cases}$$

$$\rightarrow w=x_b+iy_b \qquad (۳-۴)$$

بنابراین $w=b$ هر نقطه از صفحه مختلط Z را در صفحه مختلط W به نقطه ای با مختصات x_b+iy_b منتقل خواهد نمود.



شکل ۴-۵: نگاشت ثابت

اکنون به نگاشت خطی با تابع $w=az+b$ باز می گردیم.

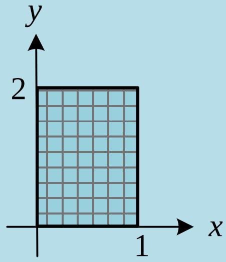
$$\begin{cases} w = az + b \\ a = |a| e^{i\theta_a} \\ b = x_b + i y_b \end{cases}$$

$$\rightarrow w = \left(|a||z| e^{i(\theta_a + \theta_z)}\right) + \left(x_b + i y_b\right) \qquad (۴-۴)$$

با توجه به موارد فوق این نگاشت دارای دوران، تغییر اندازه و انتقال می باشد.

مثال ۴-۱:

تصویر ناحیه مستطیلی زیر را تحت نگاشت مربوطه بدست آورید.



$$f(z) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z + (1 + 2i)$$

ابتدا تابع نگاشت را مرتب می کنیم:

$$f(z) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z + (1+2i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)(x+iy) + 1 + 2i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+iy) + 1 + 2i$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}\right)(x+iy) + 1 + 2i = (1+i)(x+iy) + 1 + 2i = x + iy + ix - y + 1 + 2i$$

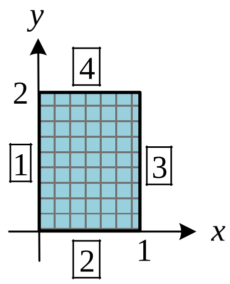
$$= (x - y + 1) + i(x + y + 2)$$

$$\rightarrow \begin{cases} u = x - y + 1 \\ v = x + y + 2 \end{cases}$$

با حل این دو معادله بر حسب u و v داریم:

$$\begin{cases} v + u = 2x + 3 \\ v - u = 2y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{v + u - 3}{2} \\ y = \dfrac{v - u - 1}{2} \end{cases} \qquad (*)$$

اکنون مرزهای ناحیه مستطیلی داده شده را مشخص می کنیم:



$\boxed{1}$ مرز: $x = 0, \quad 0 \le y \le 2$

$\boxed{2}$ مرز: $y = 0, \quad 0 \le x \le 1$

$\boxed{3}$ مرز: $x = 1, \quad 0 \le y \le 2$

$\boxed{4}$ مرز: $y = 2, \quad 0 \le x \le 1$

اکنون مرزها را توسط نگاشت و روابط $(*)$ تبدیل می کنیم:

$\boxed{1}$ نگاشت مرز : $x=\frac{v+u-3}{2}=0 \to v+u-3=0 \to v+u=3$

$\boxed{2}$ نگاشت مرز : $y=\frac{v-u-1}{2}=0 \to v-u-1=0 \to v-u=1$

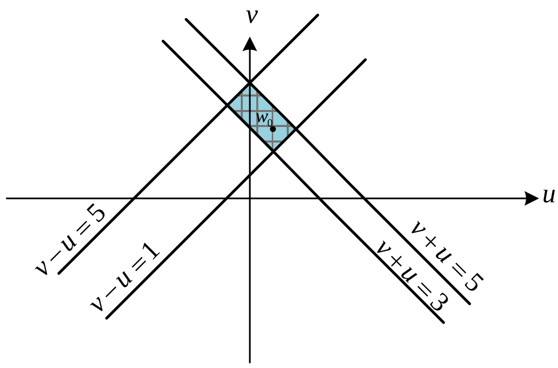
$\boxed{3}$ نگاشت مرز : $x=\frac{v+u-3}{2}=1 \to v+u-3=2 \to v+u=5$

$\boxed{4}$ نگاشت مرز : $y=\frac{v-u-1}{2}=2 \to v-u-1=4 \to v-u=5$

برای تعیین اینکه ناحیه محصور به مرزهای ۱ تا ۴ به داخل مرزهای بدست آمده در فوق نگاشته می شود یا خارج آن، یک نقطه داخل ناحیه مستطیلی را توسط نگاشت به صفحه جدید می بریم تا مشخص شود داخل مرزها نگاشته می شود یا خارج آن.

$$z_0=0.5+0.5i \to \begin{cases} u=x-y+1=0.5-0.5+1=1 \\ v=x+y+2=0.5+0.5+2=3 \end{cases} \to w_0=1+3i$$

w_0 داخل مرزهای نگاشته شده است بنابراین:



۴-۳-نگاشت نمایی:

نگاشت نمایی که دارای تابع $w=az+b$ است بصورت

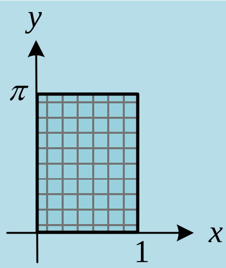
$$\begin{cases} z=x+iy \\ w=e^z \end{cases} \to w=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=Re^{i\varphi}$$

$$\to \begin{cases} R=e^x \\ \varphi=y \end{cases} \qquad (۵-۴)$$

تعریف می گردد.

مثال ۴-۲:

تصویر ناحیه مستطیلی زیر را تحت نگاشت مربوطه بدست آورید.

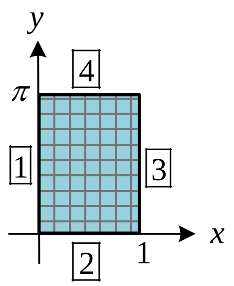


$$f(z)=e^z$$

ابتدا تابع نگاشت را مرتب می کنیم:

$$w=e^{z}\rightarrow\begin{cases}R=e^{x}\\ \varphi=y\end{cases}\qquad(*)$$

اکنون مرزهای ناحیه مستطیلی داده شده را مشخص می کنیم:



مرز $\boxed{1}$: $x=0,\ \ 0\le y\le\pi$

مرز $\boxed{2}$: $y=0,\ \ 0\le x\le 1$

مرز $\boxed{3}$: $x=1,\ \ 0\le y\le\pi$

مرز $\boxed{4}$: $y=\pi,\ \ 0\le x\le 1$

اکنون مرزها را توسط نگاشت و روابط $(*)$ تبدیل می کنیم:

نگاشت مرز $\boxed{1}$: $R=e^{0}=1\ ,0\le\varphi\le\pi$

نگاشت مرز $\boxed{2}$: $e^{0}\le R\le e^{1}\rightarrow 1\le R\le e\ \ ,\ \ \varphi=0$

نگاشت مرز $\boxed{3}$: $R=e^{1}=e\ ,0\le\varphi\le\pi$

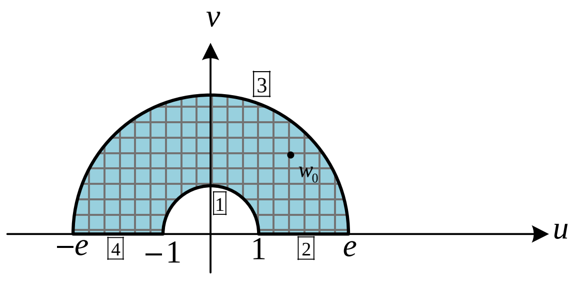
نگاشت مرز $\boxed{4}$: $e^{0}\le R\le e^{1}\rightarrow 1\le R\le e\ \ ,\ \ \varphi=\pi$

یادآوری: اگر داشته باشیم $z=re^{i\theta},-\pi\le\theta\le\pi$ بنابراین z دایره ای به شعاع r خواهد بود.

برای تعیین اینکه ناحیه محصور به مرزهای ۱ تا ۴ به داخل مرزهای بدست آمده در فوق نگاشته می شود یا خارج آن، یک نقطه داخل ناحیه مستطیلی را توسط نگاشت به صفحه جدید می بریم تا مشخص شود داخل مرزها نگاشته می شود یا خارج آن.

$$z_0=0.5+\frac{\pi}{4}i\rightarrow\begin{cases}R=e^{0.5}=1.64\\ \varphi=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\rightarrow w_0=1.64\angle\frac{\pi}{4}$$

w_0 داخل مرزهای نگاشته شده است بنابراین:



۴-۴- نگاشت لگاریتمی:

نگاشت لگاریتمی که دارای تابع $w=\ln(z)$ است بصورت

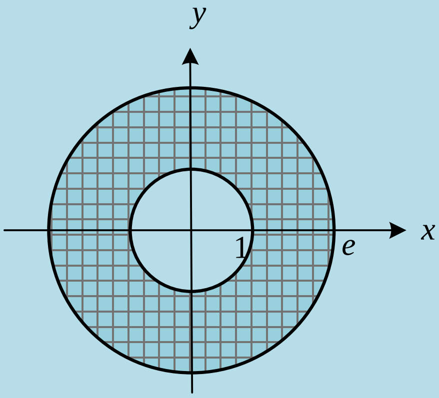
$$w=\ln(z)=\ln|z|+i(2k\pi+\theta)=u+iv$$

$$\rightarrow\begin{cases}u=\ln|z|\\ v=2k\pi+\theta\qquad -\pi<\theta\le\pi\end{cases}\qquad(۶-۴)$$

تعریف می گردد.

مثال ۴-۳:

تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت مربوطه بدست آورید.

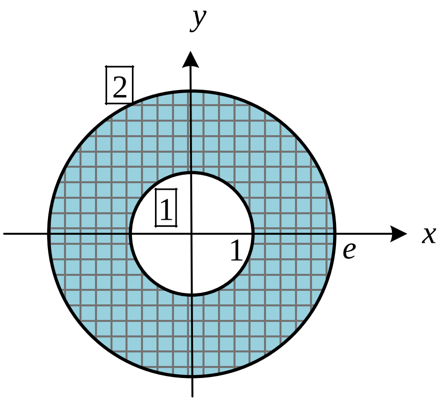


$w = Ln(z)$

ابتدا تابع نگاشت را مرتب می کنیم:

$$w = Ln(z) \rightarrow \begin{cases} u = \ln|z| \\ v = \theta \quad -\pi < \theta \le \pi \end{cases} \qquad (*)$$

ناحیه محصور دارای رابطه $1 \le |z| \le e$ می باشد، اکنون مرزهای این ناحیه را مشخص می کنیم:



$\boxed{1}$ مرز : $|z| = 1, \ -\pi \le \theta \le \pi$

$\boxed{2}$ مرز : $|z| = e, \ -\pi \le \theta \le \pi$

اکنون مرزها را توسط نگاشت و روابط $(*)$ تبدیل می کنیم:

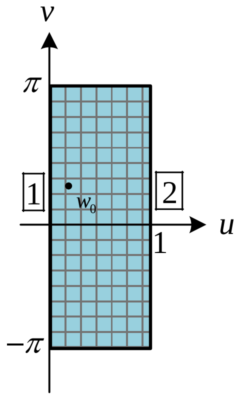
$\boxed{1}$ نگاشت مرز : $u = \ln|z| = \ln(1) = 0, \ -\pi \le v \le \pi$

$\boxed{2}$ نگاشت مرز : $u = \ln|z| = \ln(e) = 1, \ -\pi \le v \le \pi$

برای تعیین اینکه ناحیه محصور به مرزهای ۱ تا ۲ به داخل مرزهای بدست آمده در فوق نگاشته می شود یا خارج آن، یک نقطه داخل ناحیه را توسط نگاشت به صفحه جدید می بریم تا مشخص شود داخل مرزها نگاشته می شود یا خارج آن.

$$z_0 = 1.5e^{\frac{\pi}{4}i} \rightarrow \begin{cases} u = \ln(1.5) = 0.4 \\ v = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \rightarrow w_0 = 0.4 + i\frac{\pi}{4}$$

w_0 داخل مرزهای نگاشته شده است بنابراین:



۴-۵- نگاشت توانی:

نگاشت توانی که دارای تابع $w=z^n$ است بصورت

$$\begin{cases} z=re^{i\theta} \\ w=z^n \end{cases} \to w=r^n e^{in\theta}=Re^{i\varphi}$$

$$\to \begin{cases} R=r^n \\ \varphi=n\theta \end{cases} \qquad (۷-۴)$$

تعریف می گردد.

مثال ۴-۴:

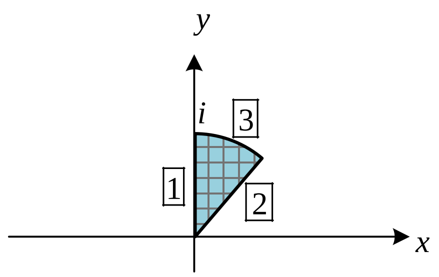
تصویر ناحیه $|z|\le 1, \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ را تحت نگاشت مربوطه بدست آورید.

$w=z^3$

ابتدا تابع نگاشت را مرتب می کنیم:

$$w=z^3 \to \begin{cases} R=r^3 \\ \varphi=3\theta \end{cases} \qquad (*)$$

اکنون مرزهای این ناحیه را مشخص می کنیم:



$\boxed{1}$ مرز : $0\le|z|\le 1,\ \theta=\frac{\pi}{2}$

$\boxed{2}$ مرز : $0\le|z|\le 1,\ \theta=\frac{\pi}{4}$

$\boxed{3}$ مرز : $|z|=1, \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

اکنون مرزها را توسط نگاشت و روابط $(*)$ تبدیل می کنیم:

$\boxed{1}$ نگاشت مرز : $0^3\le R\le 1^3 \to 0\le R\le 1,\ \varphi=3\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

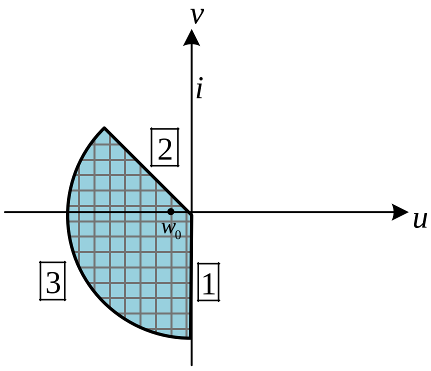
$\boxed{2}$ نگاشت مرز : $0^3\le R\le 1^3 \to 0\le R\le 1,\ \varphi=3\times\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$\boxed{3}$ نگاشت مرز : $R=1^3 \to R=1,\ \frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$

برای تعیین اینکه ناحیه محصور به مرزهای ۱ تا ۳ به داخل مرزهای بدست آمده در فوق نگاشته می شود یا خارج آن، یک نقطه داخل ناحیه را توسط نگاشت به صفحه جدید می بریم تا مشخص شود داخل مرزها نگاشته می شود یا خارج آن.

$$z_0=0.5e^{\frac{\pi}{3}i}\rightarrow\begin{cases}R=0.5^3=0.125\\ \varphi=3\times\dfrac{\pi}{3}=\pi\end{cases}\rightarrow w_0=0.125\angle\pi=-0.125$$

w_0 داخل مرزهای نگاشته شده است بنابراین:



۴-۶- نگاشت معکوس:

نگاشت توانی که دارای تابع $w=\dfrac{1}{z}$ است بصورت

$$\begin{cases}z=re^{i\theta}\\ w=\dfrac{1}{z}\end{cases}\rightarrow w=\left(re^{i\theta}\right)^{-1}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}=Re^{i\varphi}$$

$$\rightarrow\begin{cases}R=\dfrac{1}{r}\\ \varphi=-\theta\end{cases}\qquad(۴\text{-}۸)$$

تعریف می گردد.

مثال ۴-۵:

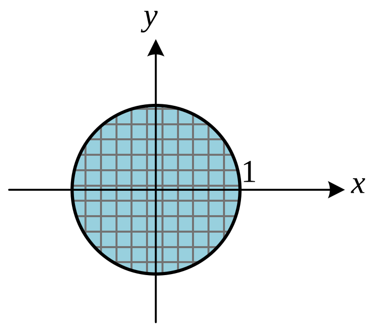
نشان دهید که نگاشت زیر نقاط داخل دایره واحد را به خارج آن می نگارد.

$$w=\frac{1}{z}$$

ابتدا تابع نگاشت را مرتب می کنیم:

$$w=\frac{1}{z}\rightarrow\rightarrow\begin{cases}R=\dfrac{1}{r}\\ \varphi=-\theta\end{cases}\qquad(*)$$

اکنون مرزهای این ناحیه را مشخص می کنیم:



مرز : $|z|=1, -\pi \le \theta \le \pi$

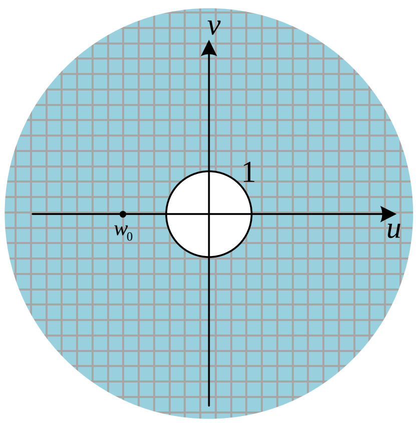
اکنون تک مرز ناحیه را توسط نگاشت و روابط $(*)$ تبدیل می کنیم:

نگاشت مرز : $R=\frac{1}{1}=1 \to -\pi \le \varphi \le \pi$

برای تعیین اینکه ناحیه محصور به تک مرز به داخل مرزهای بدست آمده در فوق نگاشته می شود یا خارج آن، یک نقطه داخل ناحیه را توسط نگاشت به صفحه جدید می بریم تا مشخص شود داخل مرزها نگاشته می شود یا خارج آن.

$$z_0 = 0.5\angle 0 \to \begin{cases} R=\frac{1}{0.5}=2 \\ \varphi = 0 \end{cases} \to w_0 = 2\angle 0$$

w_0 خارج مرز نگاشته شده است بنابراین:



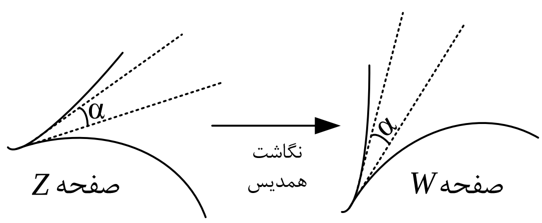
۴-۷-نگاشت دو خطی یا موبیوس:

نگاشت دو خطی که یک نوع نگاشت همدیس[۶] می باشد، از تقسیم دو خط بدست می آید. رابطه ریاضی آن بصورت

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \; ad \ne bc \qquad (۴-۹)$$

---

[۶] به نگاشت $w=f(z)$ همدیس گوییم اگر زاویه بین هر دو منحنی هموار، برابر و جهت آنها تحت این نگاشت تغییر نکند:



بوده و دارای این خاصیت است که سه نقطه متمایز از صفحه Z را به سه نقطه متمایز از صفحه W می نگارد.

■ **قضیه:**

تنها یک تبدیل دو خطی وجود دارد که همواره سه نقطه z_1، z_2 و z_3 را به ترتیب بر روی نقاط w_1، w_2 و w_3 می نگارد:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \qquad (۱۰-۴)$$

■ **قضیه:**

نگاشتی دو خطی که نیم صفحه $y \ge 0$ را به $|w| \le 1$ (داخل و روی مرز دایره واحد) می نگارد بصورت زیر است:

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \qquad (۱۱-۴)$$

که در آن z_0 یک نقطه دلخواه در $y \ge 0$ می باشد.

قضیه:

نگاشتی دو خطی که نیم صفحه $x \ge 0$ را به $|w| \le 1$ (داخل و روی مرز دایره واحد) می نگارد بصورت زیر است:

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0} \qquad (۱۲-۴)$$

که در آن z_0 یک نقطه دلخواه در $x \ge 0$ می باشد.

مثال ۴-۶:

نگاشت همدیسی که سه نقطه $z_1=\infty$، $z_2=i$ و $z_3=0$ را به ترتیب بر روی نقاط $w_1=0$، $w_2=i$ و $w_3=\infty$ می نگارد بدست آورید:

با استفاده از رابطه ۴-۱۰ داریم:

$$\frac{(w-0)(i-\infty)}{(w-\infty)(i-0)}=\frac{(z-\infty)(i-0)}{(z-0)(i-\infty)} \to \frac{(w-0)}{(i-0)}=\frac{(i-0)}{(z-0)} \to \frac{w}{i}=\frac{i}{z} \to w=\frac{i^2}{z}=\frac{-1}{z}$$

نکته:

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \to \begin{cases} a=d=0 & \text{نگاشت معکوس:} \\ a=c=0 & \text{نگاشت ثابت:} \\ b=d=0 & \text{نگاشت ثابت:} \\ c=0 & \text{نگاشت خطی:} \end{cases}$$

بخش پنجم:

سری های مختلط، قضیه مانده ها
و کاربرد آنها در انتگرال های مختلط

بخش پنجم: سری های مختلط، قضیه مانده ها و کاربرد آنها در انتگرال های مختلط

۵-۱- سری های مختلط:

تابعی مختلط که دامنه آن اعداد طبیعی و برد آن مجموعه غیر تهی مختلط باشد یک دنباله مختلط نام دارد و به شکل $\{z_n\}_1^{\infty}$ نمایش داده می شود. به دلیل خاصیت شرکت پذیری عمل جمع روی مجموعه اعداد مختلط می توان نوشت:

$$\{S_n\}_1^n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

که اگر این مجموع نامتناهی باشد به این دنباله سری $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ می گوییم. اگر این مجموع به یک عدد محدود میل کند سری را همگرا و اگر با افزایش n بزرگتر شود، سری را واگرا گوییم.

بطور مثال یکی از معروفترین سری ها در ریاضیات، سری توانی[1] (هندسی) می باشد:

$$S_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \tag{۵-۱}$$

همگرایی و واگرایی این سری بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \begin{cases} \xrightarrow{|z|<1} \dfrac{1}{1-z} & \text{همگرا} \\ \xrightarrow{|z|\geq 1} \infty & \text{واگرا} \end{cases}$$

برای تشخیص همگرایی یا واگرایی دیگر سری ها می توان از آزمون های زیر استفاده نمود:

الف) آزمون نسبت: اگر $\sum_n f_n(z)$ تعریف گردد، آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = L \begin{cases} L<1 & \text{همگرا} \\ L>1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

ب) آزمون ریشه: اگر $\sum_n f_n(z)$ تعریف گردد، آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n|} = L \begin{cases} L<1 & \text{همگرا} \\ L>1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

---

[1] سری هندسی بصورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n \overset{|q|<1}{=} a\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots \overset{|q|<1}{=} a\left(\frac{1}{1-q}\right)$$

نکته:

ناحیه همگرایی سری محدوده ای است که به ازای مقادیر z در آن،سری $f_n(z)=\sum_n z_n$ همگرا می شود. شعاع ناحیه همگرایی که معمولاً بصورت دایره ای بیان می گردد از رابطه $R=\frac{1}{L}$ بدست می آید.

مثال ۵-۱:

ناحیه همگرایی سری های زیر را مشخص نمایید:

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)$

با استفاده از آزمون نسبت داریم:

$$f_n(z)=\frac{z^n}{n!}\to f_{n+1}(z)=\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right|$$

اکنون با استفاده از خواص فاکتوریل[۲] داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{z\,\cancel{z^n}}{(n+1)\times\cancel{n!}}}{\frac{\cancel{z^n}}{\cancel{n!}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z}{n+1}\right|=0<1$$

بنابراین سری همگرا بوده و شعاع ناحیه همگرایی آن برابر $R=\frac{1}{0}=\infty$ می باشد. یعنی ناحیه همگرایی کل صفحه مختلط خواهد بود.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^n$

با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$f_n(z)=n^n z^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n z^n|}=\lim_{n\to\infty}n|z|=\infty$$

بنابراین سری واگرا می باشد.

---

[۲] تعریف فاکتوریل:

$$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1$$

خواص مهم فاکتوریل:

۱) $n!=n\times(n-1)!$

۲) $0!=1$

۵-۱-۱- سری های تیلور و لوران:

الف) سری تیلور:

اگر تابع $f(z)$ در همسایگی $z=z_0$ تحلیلی باشد آنگاه نمایش دیگری برای $f(z)$ بصورت

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad (۵-۲)$$

خواهد بود که در آن C دایره ای به مرکز z_0 و

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\tau)}{(\tau-z_0)^{n+1}}d\tau=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (۵-۳)$$

می باشد. این سری که در واقع

$$f(z)=f(z_0)+\frac{(z-z_0)f'(z_0)}{1!}+\frac{(z-z_0)^2f''(z_0)}{2!}+\dots \qquad (۵-۴)$$

می باشد را سری تیلور تابع $f(z)$ حول نقطه $z=z_0$ گویند.

نکته: سری تیلور زمانی استفاده می شود که تابع در دامنه مورد نظر تحلیلی باشد.

مثال ۵-۲:

سری تیلور تابع زیر را حول نقطه $z_0=\frac{\pi}{2}$ بدست آورید:

$$f(z)=\cos(z)$$

با استفاده از رابطه ۵-۴ داریم:

$$f(z)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}+\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}+\dots$$

$$\rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\\ f'(z)=-\sin(z)\rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\\ f''(z)=\left(-\sin(z)\right)'=-\cos(z)\rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\\ f^{(3)}(z)=\left(-\cos(z)\right)'=\sin(z)\rightarrow f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\\ \vdots\\ f^{(2n-1)}(z)=(-1)^n\sin(z)\rightarrow f^{(2n-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n\\ f^{(2n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$$

$$\rightarrow f(z)=0+\frac{-\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{1!}+0+\ldots+\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{3}}{3!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n-1)!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}$$

ب) سری مک لوران:

اگر در رابطه سری تیلور نقطه مورد نظر را $z_0=0$ قرار دهیم سری حاصل را مک لوران گویند. جدول ۵-۱ سری مک لوران توابع اصلی را نمایش می دهد.

جدول ۵-۱: سری مک لوران توابع اصلی

ناحیه همگرایی	سری مک لوران تابع	ردیف
$\lvert z\rvert<\infty$	$e^{z}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$	۱
$\lvert z\rvert<\infty$	$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$	۲
$\lvert z\rvert<\infty$	$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	۳
$\lvert z\rvert<\frac{\pi}{2}$	$\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+\ldots$	۴
$\lvert z\rvert<\frac{\pi}{2}$	$\sec z=1+\frac{z^2}{2}+\frac{5z^4}{24}+\ldots$	۵
$0<\lvert z\rvert<\pi$	$\csc z=\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7z^3}{360}+\ldots$	۶
$\lvert z\rvert<1$	$\tan^{-1}z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots$	۷
$\lvert z\rvert<1$	$\ln\lvert 1+z\rvert=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots$	۸
$\lvert z\rvert<1$	$(1+z)^k=1+kz+\frac{k(k-1)z^2}{2!}+\ldots$	۹
$\lvert z\rvert<\frac{\pi}{2}$	$\ln\left\lvert\frac{1+z}{1-z}\right\rvert=2(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+..)$	۱۰

ج) سری لوران:

اگر تابع $f(z)$ در همسایگی $z=z_0$ تحلیلی نباشد آنگاه نمایش دیگری برای $f(z)$ بصورت

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(z-z_0)^{-n} \tag{۵-۵}$$

خواهد بود که در آن C ناحیه محدود دو دایره به مرکز z_0 و

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\tau)}{(\tau-z_0)^{n+1}}d\tau \tag{۶-۵}$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\tau)}{(\tau-z_0)^{1-n}}d\tau \tag{۷-۵}$$

می باشد. این سری را که سری لوران تابع $f(z)$ نام دارد می توان بصورت

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\tau)}{(\tau-z_0)^{n+1}}d\tau,\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots \qquad (۸-۵)$$

نیز نمایش داد.

نکته: سری لوران توابع را حول نقطه $z_0=0$ می توان با اعمال روابط جبری روی سری مک لوران توابع تشکیل دهنده آن محاسبه نمود.

مثال ۵-۳:

سری لوران توابع زیر را حول نقطه $z_0=0$ با استفاده از سری های مک لوران بدست آورید.

۱) $f(z)=\dfrac{\sinh(z)}{z^4}$

ابتدا باید سری مک لوران تابع $\sinh(z)$ را محاسبه نماییم:

$$\sinh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

با استفاده از جدول ۵-۱ داریم:

$$\sinh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\to e^{-z}=1+\frac{(-z)}{1!}+\frac{(-z)^2}{2!}+\frac{(-z)^3}{3!}+\dots=1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\dots$$

$$\to\sinh(z)=\frac{1}{2}\left(e^z-e^{-z}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\cancel{1}+\frac{z}{1!}+\cancel{\frac{z^2}{2!}}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)-\left(\cancel{1}-\frac{z}{1!}+\cancel{\frac{z^2}{2!}}-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2z}{1!}+\frac{2z^3}{3!}+\dots\right)=\frac{z}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\dots$$

اکنون به سراغ تابع $f(z)$ می رویم:

$$f(z)=\frac{\sinh(z)}{z^4}=\frac{\frac{z}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\dots}{z^4}=\frac{1}{1!z^3}+\frac{1}{3!z}+\dots$$

۲) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$

با استفاده از جدول ۵-۱ داریم:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\to e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)}{1!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{3!}+\dots=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots$$

۳) $f(z)=z^2\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$

ابتدا باید سری مک لوران تابع $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ را محاسبه نماییم. با استفاده از جدول ۵-۱ داریم:

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots \to \cos\left(\frac{1}{z}\right)=1-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^6}{6!}+\ldots=1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots$$

اکنون به سراغ تابع $f(z)$ می رویم:

$$f(z)=z^2\cos\left(\frac{1}{z}\right)=z^2\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right)=z^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^3}+\ldots$$

مثال ۵-۴:

سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ را حول نقطه $z_0=0$ در حالت های زیر بدست آورید.

۱) $0<|z|<1$

سری مک لوران توابع تشکیل دهنده $f(z)$ در جدول ۵-۱ موجود نیست، بنابراین ابتدا کسر را تجزیه نموده و سپس با استفاده از سری توانی سری لوران تابع $f(z)$ را بدست می آوریم:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{(z-2)}$$

$$\begin{cases} A=\lim\limits_{z\to1}(z-1)f(z)=-1 \\ B=\lim\limits_{z\to2}(z-2)f(z)=1 \end{cases} \to f(z)=\frac{-1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)}$$

با توجه به بازه تعریف شده دو جمله باید به گونه ای نوشته شوند که سری توانی معادل در بازه $0<|z|<1$ همگرا باشد بنابراین:

$$\frac{-1}{(z-1)}=\frac{1}{(1-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{(z-2)}=\frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)}=\frac{-1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\frac{-1}{2^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad \left|\frac{z}{2}\right|<1\to|z|<2$$

اکنون به سراغ تابع $f(z)$ می رویم:

$$f(z)=\frac{-1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{-1}{2^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad (|z|<1)\cap(|z|<2)=|z|<1$$

$$\to f(z)=\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad |z|<1$$

۲) $1<|z|<2$

دو جمله باید به گونه ای نوشته شوند که سری توانی معادل در بازه $0<|z|<1$ همگرا باشد بنابراین:

$$\frac{-1}{(z-1)}=\frac{-1}{z(1-z^{-1})}=\left(-\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{-1}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}= \qquad \left|z^{-1}\right|<1\to|z|>1$$

$$\frac{1}{(z-2)}=\frac{1}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)}=\frac{-1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\frac{-1}{2^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad \left|\frac{z}{2}\right|<1\to|z|<2$$

اکنون به سراغ تابع $f(z)$ می رویم:

$$f(z)=\frac{-1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{-1}{2^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad (|z|>1)\cap(|z|<2)=1<|z|<2$$

$$\to f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{-1}{2^{n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad 1<|z|<2$$

به تعاریف زیر توجه کنید:

- تابع تحلیلی $f(z)$ دارای **صفر** از مرتبه m در z_0 است اگر تابع $f(z)$ دارای عامل $(z-z_0)^m$ بصورت
- $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$

باشد که در آن $g(z)$ در z_0 تحلیلی و مخالف صفر می باشد. همچنین در توابع کسری، عواملی که صورت کسر را صفر می‌کنند، صفر تابع خوانده می شوند.

بطور مثال $z=0$ در تابع $\sin z$ صفر ساده و $z=2$ در تابع $\frac{(z-2)^2}{\tan^2 z}$ صفر مرتبه دوم خوانده می شود.

- اگر تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد این نقطه را **تکین** نامند.

بطور مثال ریشه مخرج توابع کسری نقطه تکین بشمار می آید. همچنین $z=0$ در تابع $e^{\frac{1}{z}}$ نقطه تکین است.

- اگر در همسایگی z_0 هیچ نقطه تکین دیگری وجود نداشته باشد آن را **تکین تنها** گویند.

بطور مثال $z=1$ در تابع $\frac{z^2+4}{z-1}$ نقطه تکین تنها بشمار می آید.

- اگر تابع در z_0 دارای نقطه تکین تنها باشد، آنگاه در همسایگی z_0 دارای سری لوران است.
- بخش دوم رابطه (۵-۵) را بخش اصلی سری لوران گویند که اگر صفر باشد (وجود نداشته باشد) نقطه تکین را **نقطه تکین برداشتنی** گویند.

بطور مثال نقطه $z=0$ در تابع نقطه تکین برداشتنی می باشد زیرا:

$$\frac{1-\cos(z)}{z}=\frac{z}{2!}-\frac{z^3}{4!}+\ldots.$$

- اگر بخش اصلی از تعداد متناهی جمله تشکیل شده باشد نقطه تکین را **قطب** نامند. توان آخرین جمله را مرتبه قطب نامند که اگر یک باشد **قطب ساده** خواهد بود. همچنین در توابع کسری، عواملی که مخرج کسر را صفر می کنند تابع خوانده می‌شوند.
- بطور مثال $z=5$ در تابع $\sin\left(\frac{1}{z-5}\right)$ قطب ساده و $z=0$ در تابع $\frac{(z-4)}{z^2}$ صفر مرتبه دوم خوانده می شود.
- اگر بخش اصلی از تعدادی نامتناهی جمله تشکیل شده باشد نقطه تکین را نقطه تکین اساسی گویند.
- بطور مثال نقطه $z=1$ در تابع زیر نقطه تکین اساسی می باشد زیرا:

$$e^{\frac{-1}{(z-1)^2}}=1-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2!(z-1)^4}-\frac{1}{3!(z-1)^6}+\ldots$$

- b_1 یعنی ضریب $(z-z_0)^{-1}$ در سری لوران را مانده $f(z)$ در z_0 گویند و آن را با نماد $\mathrm{Res}(z_0)$ نشان می دهند.

بطور مثال در مثال ۵-۳ مانده تابع قسمت اول در $z=0$ برابر $\frac{1}{3!}$، مانده تابع قسمت دوم در $z=0$ برابر $\frac{1}{1!}$ و مانده تابع قسمت سوم در $z=0$ برابر 0 است.

- برای بدست آوردن مانده مربوط به قطب مرتبه m ام از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$b_m=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z) \tag{۵-۹}$$

بنابراین اگر قطب ساده باشد مانده مربوطه از رابطه زیر بدست می آید:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\ f(z) \tag{۵-۱۰}$$

- اگر تابع f(z) دارای یک قطب ساده در z_0 باشد و بتوان آن را بصورت $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ نوشت که هر دو تابع در z_0 تحلیلی بوده و $Q'(z)\neq 0$ آنگاه می توان نشان داد:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{۵-۱۱}$$

مثال ۵-۵:

مانده توابع زیر را در نقطه z_0 محاسبه نمایید.

۱) $f(z)=\frac{1}{z(z-5)^2}\ ,z_0=0$

$z=0$ در تابع $f(z)$ یک قطب ساده در مخرج است. مانده تابع در این قطب را به دو روش محاسبه می کنیم. ابتدا با استفاده از رابطه ۵-۱۰ داریم:

$$b_1=\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to 0}\cancel{z}\left(\frac{1}{\cancel{z}(z-5)^2}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-5)^2}=\frac{1}{25}$$

با روش دیگر با استفاده از رابطه ۵-۱۱ مانده تابع در $z=0$ داریم:

$$\begin{cases}P(z)=1\\ Q(z)=z(z-5)^2=z(z^2-10z+25)=z^3-10z^2+25z\end{cases}\rightarrow f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{z(z-5)^2}$$

$$Q'(0)=3z^2-100z+25\Big|_{z=0}=25\neq 0$$

$$\rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{P(0)}{Q'(0)}=\frac{1}{25}$$

۲) $f(z)=\frac{1}{z(z-5)^2}\ ,z_0=5$

$z=5$ در تابع $f(z)$ یک قطب مرتبه دوم $(m=2)$ در مخرج است. مانده تابع در این قطب با استفاده از رابطه ۵-۹ بدست می آید:

$$b_2=\operatorname*{Res}_{z=5} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 5}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}((z-5)^2\ f(z)=\lim_{z\to 5}\frac{d}{dz}\cancel{(z-5)^2}\left(\frac{1}{z\cancel{(z-5)^2}}\right)=\lim_{z\to 5}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$=\lim_{z\to 5}\left(\frac{-1}{z^2}\right)=\frac{-1}{25}$$

۵-۲-انتگرال گیری از توابع مختلط:

انتگرال گیری در توابع مختلط به دلیل اختلافات عمده توابع حقیقی و مختلط، مفهومی متفاوت از انتگرال حقیقی را در بردارد. انتگرال گیری در حوزه مختلط به معنای محاسبه سطح نبوده و صرفاً یک ابزار ریاضی برای انجام محاسبات پیچیده می باشد. این نوع انتگرال گیری بجای بازه عددی بر روی یک منحنی تعریف می گردد، یعنی:

$$\oint_C f(z)dz \qquad (۵-۱۲)$$

که در آن C یک منحنی در دامنه تحلیلی تابع می باشد. انتگرال گیری مختلط روی منحنی C بسته به نوع منحنی به دو بخش تقسیم می گردد:

الف) انتگرال گیری روی خط

ب) انتگرال گیری روی منحنی بسته

الف) انتگرال گیری روی خط

اگر منحنی C با معادله

$$z(t)=\phi(t)+i\psi(t) \quad a\le t\le b \qquad (۵-۱۳)$$

در نظر گرفته شود که در آن $\phi(t)$ و $\psi(t)$ توابع حقیقی تک متغیره و در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند، داریم:

$$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(\phi+i\psi).(\phi'+i\psi')dt \qquad (۵-۱۴)$$

نکته:

خصوصیات اصلی انتگرال گیری مختلط روی خط به شرح زیر است:

۱) $\int_C kf(z)dz=k\int_c f(z)dz$

۲) $\int_C (f(z)\pm g(z))dz=\int_c f(z)dz\pm\int_c g(z)dz$

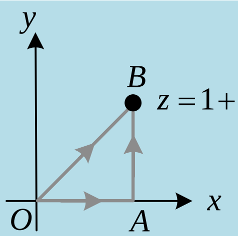
۳) $\int_{C_1+C_2} f(z)dz=\int_{c_1} f(z)dz+\int_{c_2} f(z)dz$

۴) $\int_C f(z)dz=-\int_{c'} f(z)dz$

۵) $\left|\int_C f(z)dz\right|\le ML$

مثال ۵-۶:

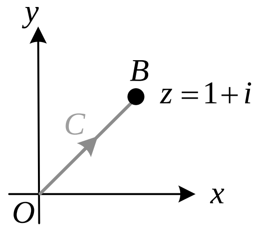
انتگرال تابع $f(z)=z^2$ را روی دو مسیر OB و OAB محاسبه نمایید:



با استفاده از روابط ۵-۱۳ و ۵-۱۴ داریم:

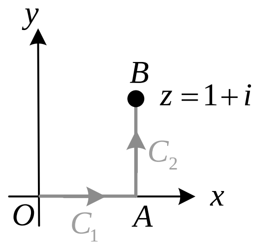
$$C: z = x+iy$$
$$\to \begin{cases} \phi = x \\ \psi = y \end{cases}$$
$$\to dz = d\phi + id\psi = dx + idy$$
$$\to \int_C f(z) = \int_C z^2 dz = \int_C (x+iy)^2 (dx+idy)$$

ابتدا مسیر OB را که در آن $x=y$ است، محاسبه می کنیم:



$$C: z = x+ix \quad 0 \le x \le 1$$
$$\to \begin{cases} \phi = x \\ \psi = x \end{cases}$$
$$\to dz = d\phi + id\psi = dx + idx = (1+i)dx$$
$$\to \int_C f(z)dz = \int_0^1 \underbrace{(x+ix)^2}_{(1+i)^2 x^2} (1+i)dx = (1+i)^3 \int_0^1 x^2 dx = (1+i)^3 \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3}(1+i)^3$$

اکنون انتگرال تابع را روی مسیر OAB که شامل دو زیر مسیر OA و AB می باشد، محاسبه می کنیم:

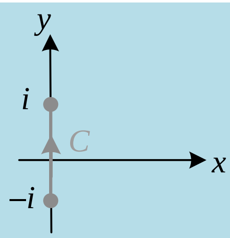


$$C_1: z = x+i0 \quad 0 \le x \le 1$$
$$\to \begin{cases} \phi = x \\ \psi = 0 \end{cases}$$
$$\to dz = d\phi + id\psi = dx + i0 = dx$$
$$\to \int_{C_1} f(z)dz = \int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$C_2: z = 1+iy \quad 0 \le y \le 1$$
$$\to \begin{cases} \phi = 1 \\ \psi = y \end{cases}$$
$$\to dz = d\phi + id\psi = 0 + idy = idy$$
$$\to \int_{C_2} f(z)dz = \int_0^1 (1+iy)^2 (idy) = i\int_0^1 (1+2iy-y^2)dy = i\left(y+iy^2-\frac{y^3}{3}\right)_0^1 = i\left(1+i-\frac{1}{3}\right) = -1+\frac{2}{3}i$$
$$\int_{OAB} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3}i = \frac{2}{3}(-1+i)$$

مثال ۵-۷:

انتگرال تابع $f(z) = |z|$ را روی مسیر C محاسبه نمایید:



با استفاده از روابط ۵-۱۳ و ۵-۱۴ داریم:

$$C: z = x + iy = 0 + iy \quad -1 \le y \le 1$$

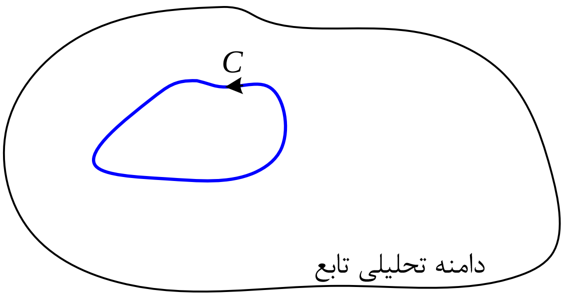
$$\to \begin{cases} \phi = 0 \\ \psi = y \end{cases}$$

$$\to dz = d\phi + i\,d\psi = 0 + i\,dy = i\,dy$$

$$\to \int_C f(z) = \int_C |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |iy|(i\,dy) = i\int_{-1}^{1} |y|\,dy = 2i\int_0^1 y\,dy = 2i\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 = i$$

ب) انتگرال گیری روی منحنی بسته:

منظور از منحنی بسته یک منحنی در دامنه تحلیلی تابع با جهت مثلثاتی می باشد:



شکل ۵-۱: یک نمونه از منحنی C

انتگرال گیری مختلط، با استفاده از چند قضیه اساسی امکان پذیر است:

■ قضیه انتگرال کوشی – گورسا:

اگر تابع $f(z)$ در ناحیه D و روی مرز آن C تحلیلی باشد آنگاه:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \qquad (۵\text{-}۱۵)$$

■ قضیه:

با فرض اینکه تابع $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D و روی مرز آن تحلیلی باشد، آنگاه به ازای هر نقطه z_0 در D و هر مسیر بسته ساده C در D که z_0 را محصور کند داریم:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)}\,dz \qquad (۵\text{-}۱۶)$$

جاییکه انتگرالگیری در جهت عکس عقربه های ساعت است.

■ قضیه:

اگر تابع $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D با مرز C تحلیلی باشد، آنگاه در هر نقطه نظیر z_0 از این ناحیه دارای مشتق از هر مرتبه ایست که تحلیلی اند و از رابطه زیر محاسبه می شوند:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (۵\text{-}۱۷)$$

مثال ۵-۸:

انتگرال توابع مختلط زیر را محاسبه نمایید:

۱) $\oint_C \frac{e^z}{\cos(z)}dz \quad ,C:|z|=1$

مهمترین نکته در حل انتگرال های مختلط محاسبه نقاط تکین آنهاست.

$$f(z)=\frac{e^z}{\cos(z)} \to \text{نقاط تکین}: \cos(z)=0 \to z=\frac{(2k+1)\pi}{2},\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقاط تکین در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارند یا خیر؟

$$z=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\ldots$$

$$\left|\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}>1$$

کوچکترین نقطه تکین در ناحیه قرار ندارد، بنابراین هیچکدام از نقاط تکین در ناحیه محدود به مرزهای C قرار ندارند. طبق قضیه کوشی و رابطه ۵-۱۵ داریم:

$$\oint_C \frac{e^z}{\cos(z)}dz=0$$

۲) $\oint_C \frac{\cosh(z)}{z(z-2)}dz \quad ,C:|z|=1$

$$f(z)=\frac{\cosh(z)}{z(z-2)} \to \text{نقاط تکین}: z(z-2)=0 \to z=0,2$$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقاط تکین در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارند یا خیر؟

$$\begin{cases}|0|<1 & ☑\\ |2|>1 & ☒\end{cases}$$

بنابراین تنها یک نقطه تکین ساده در $z=0$ در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارد. با استفاده از رابطه ۵-۱۶ داریم:

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\overbrace{\left(\frac{\cosh(z)}{z-2}\right)}^{f(z)}}{(z-0)}dz$$

$$f(z)=\frac{\cosh(z)}{z-2} \to f(0)=\frac{\cosh(0)}{0-2}=\frac{-1}{2}$$

$$\to f(0)=\frac{-1}{2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\left(\frac{\cosh(z)}{z-2}\right)}{(z-0)}dz \to \oint_C \frac{\cosh(z)}{z(z-2)}dz=-\pi i$$

۳) $\oint_C \frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}dz \quad ,C:|z|=2$

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}\rightarrow \text{نقاط تکین}:(z-3)(z+1)^2=0\rightarrow z=-1,-1,3$$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقاط تکین در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارند یا خیر؟

$$\begin{cases}|-1|<2 & \boxtimes\\ |3|>2 & \boxtimes\end{cases}$$

بنابراین تنها یک نقطه تکین مضاعف در $z=-1$ در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارد. با استفاده از رابطه ۵-۱۷ با $n=1$ داریم:

$$f^{(1)}(-1)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_C\frac{\overbrace{\left(\frac{e^z}{z-3}\right)}^{f(z)}}{(z+1)^2}dz$$

$$f(z)=\frac{e^z}{z-3}\rightarrow f'(z)=\frac{e^z(z-3)-e^z}{(z-3)^2}=\frac{e^z(z-4)}{(z-3)^2}\rightarrow f'(-1)=\frac{e^z(z-3)-e^z}{(z-3)^2}=\frac{e^{-1}(-1-4)}{(-1-3)^2}=\frac{-5}{16e}$$

$$\frac{-5}{16e}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\frac{e^z}{z-3}}{(z+1)^2}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}dz\rightarrow\oint_C\frac{e^z}{(z-3)(z+1)^2}dz=2\pi i\left(\frac{-5}{16e}\right)=\frac{-5\pi i}{8e}$$

■ قضیه انتگرال گیری به روش مانده ها:

اگر تابع $f(z)$ در داخل و روی مرز بسته C جز در تعداد متناهی از نقاط z_1 تا z_n تحلیلی باشد آنگاه:

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}(z_1)+\operatorname{Res}(z_2)+\ldots+\operatorname{Res}(z_n)\right) \qquad (۵-۱۸)$$

مانده تابع در نقطه z_k یا به طریق سری لوران و یا از روابط ۵-۹ و ۵-۱۰ بدست می آید.

مثال ۵-۹:

انتگرال توابع مختلط زیر را محاسبه نمایید:

۱) $\oint_C\frac{(z^6+1)}{z^2(z+1)}dz \quad ,C:|z|=2$

ابتدا نقاط تکین را محاسبه می کنیم:

$$f(z)=\frac{(z^6+1)}{z^2(z+1)}\rightarrow \text{نقاط تکین}:\ z^2(z+1)=0\rightarrow z=0,0,-1$$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقاط تکین در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارند یا خیر؟

$$\begin{cases}|0|<2 & \boxtimes\\ |-1|<2 & \boxtimes\end{cases}$$

اکنون مانده تابع را در این نقاط محاسبه می کنیم:

مانده تابع در قطب $z=-1$ که یک قطب ساده بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\lim_{z=-1}(z+1)f(z)=\lim_{z=-1}\cancel{(z+1)}\left(\frac{(z^6+1)}{z^2\cancel{(z+1)}}\right)=2$$

روش دیگر استفاده از مانده تابع در توابع کسری می باشد:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\left.\frac{\left(z^6+1\right)}{\left(z^2(z+1)\right)'}\right|_{z=-1}=\left.\frac{\left(z^6+1\right)}{\left(z^3+z^2\right)'}\right|_{z=-1}=\left.\frac{\left(z^6+1\right)}{\left(3z^2+2z\right)}\right|_{z=-1}=2$$

مانده تابع در قطب $z=0$ که یک قطب مضاعف بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}z^2 f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\cancel{z^2}\left(\frac{z^6+1}{\cancel{z^2}(z+1)}\right)\right)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^6+1}{z+1}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{6z^5(z+1)-\left(z^6+1\right)}{(z+1)^2}\right)=-1$$

بنابراین:

$$\oint_C \frac{\left(z^6+1\right)}{z^2(z+1)}dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}(0)+\operatorname{Res}(-1)\right)=2\pi i(-1+2)=2\pi i$$

۲) $\oint_C z^4\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz \quad ,C:|z|=1$

ابتدا نقاط تکین را محاسبه می کنیم:

$$f(z)=z^4\sin\left(\frac{1}{z}\right)\to \text{نقطه تکین}: z=0$$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقطه تکین در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارند یا خیر؟

$|0|<1$ ☑

اکنون مانده تابع را در این نقطه محاسبه می کنیم. برای محاسبه مانده تابع از روش سری لوران استفاده می کنیم:

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\to\sin\left(\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^7}{7!}+\ldots=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots$$

$$\to z^4\sin\left(\frac{1}{z}\right)=z^4\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots\right)=z^3-\frac{z}{3!}+\frac{1}{5!z}-\ldots$$

$$\to b_1=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$$

بنابراین:

$$\oint_C z^4\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}(0)\right)=2\pi i\left(\frac{1}{120}\right)=\frac{\pi i}{60}$$

۳) $\oint_C \frac{3z}{3z-1}dz \quad ,C:|z|=1$

$$f(z)=\frac{3z}{3z-1}\to \text{نقاط تکین}: 3z-1=0\to z=\frac{1}{3}$$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقاط تکین در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارند یا خیر؟

$\left|\frac{1}{3}\right|<1$ ☑

بنابراین تنها یک نقطه تکین مضاعف در $z=\frac{1}{3}$ در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارد. برای محاسبه نقاط تکین با استفاده از روابط ۵-۹ یا ۵-۱۰ تابع باید به فرم استاندارد تبدیل شود:

$$f(z)=\frac{3z}{3z-1}=\frac{3z}{3\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{3}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\left(z-\frac{1}{3}\right)f(z)=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\cancel{\left(z-\frac{1}{3}\right)}\frac{z}{\cancel{\left(z-\frac{1}{3}\right)}}=\frac{1}{3}$$

روش دیگر استفاده از مانده تابع در توابع کسری می باشد:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{3}\right)=\left.\frac{z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)'}\right|_{z=\frac{1}{3}}=\left.\frac{z}{1}\right|_{z=\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

بنابراین:

$$\oint_C\frac{3z}{3z-1}dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{3}\right)\right)=2\pi i\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi i}{3}$$

۵-۳- کاربرد قضیه مانده ها در حل انتگرال های حقیقی:

یکی از مهمترین کاربردهای انتگرالی گیری مختلط، محاسبه انتگرال های حقیقی است. با استفاده از انتگرال گیری مختلط و روش مانده ها می توان انتگرال های حقیقی که به روش های معمول قابل حل نیستند را محاسبه نمود. در این بخش با استفاده از قضیه مانده ها چند نوع انتگرال حقیقی را بررسی می کنیم.

۵-۳-۱- محاسبه انتگرال هایی به فرم $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$:

برای حل این انتگرال ها از تغییر متغیر های زیر استفاده می کنیم:

$$z=e^{i\theta}\to dz=i\underbrace{e^{i\theta}}_{z}d\theta\to dz=iz\,d\theta\to d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$z=e^{i\theta}\to\begin{cases}\sin(n\theta)=\frac{1}{2i}\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)=\frac{1}{2i}\left(z^n-z^{-n}\right)\\ \cos(n\theta)=\frac{1}{2}\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z^n+z^{-n}\right)\end{cases}$$

$$\to\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta=\oint_C f(z)\,dz$$

C در این رابطه دایره واحد می باشد.

مثال ۵-۱۰:

انتگرال زیر را محاسبه نمایید:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13+12\cos\theta}$$

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$z=e^{i\theta}\rightarrow\rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$$

$$\rightarrow\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13+12\cos\theta}=\oint_C\frac{\left(\frac{dz}{iz}\right)}{13+12\left(\frac{1}{2}\left(z^n+z^{-n}\right)\right)}=\oint_C\frac{dz}{iz\left(13+6\left(z+z^{-1}\right)\right)}=\frac{1}{i}\oint_C\frac{dz}{13z+6z^2+6}$$

$$=\frac{1}{6i}\oint_C\frac{dz}{z^2+\frac{13}{6}z+1}$$

ابتدا نقاط تکین را محاسبه می کنیم:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+\frac{13}{6}z+1}=\frac{1}{\left(z+\frac{2}{3}\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)}\ \text{: نقاط تکین}\ \rightarrow\left(z+\frac{2}{3}\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)=0\rightarrow z=-\frac{2}{3},-\frac{3}{2}$$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقاط تکین در ناحیه محدود به مرزهای C قرار دارند یا خیر؟

$$\begin{cases}\left|\frac{2}{3}\right|<1 & \boxtimes\!\!\!\checkmark\\ \left|\frac{3}{2}\right|>1 & \boxtimes\end{cases}$$

اکنون مانده تابع را در این نقطه محاسبه می کنیم. مانده تابع در قطب $z=-\frac{2}{3}$ که یک قطب ساده بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{2}{3}} f(z)=\lim_{z=-1}(z+\frac{2}{3})f(z)=\lim_{z=-1}\left(\cancel{z+\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{1}{\left(\cancel{z+\frac{2}{3}}\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)}\right)=\frac{6}{5}$$

بنابراین:

$$\rightarrow\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13+12\cos\theta}=\frac{1}{6i}\oint_C\frac{dz}{z^2+\frac{13}{6}z+1}=\frac{1}{6i}\left(2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{1}{6i}\times2\pi i\times\frac{6}{5}=\frac{2\pi}{5}$$

۵-۳-۲- محاسبه انتگرال هایی به فرم $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ که در آن $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (کسری) می باشد:

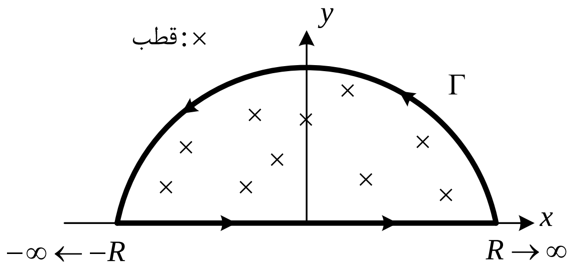
اگر داشته باشیم:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

که در آن $f(x)$ فرم کسری $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ دارد، برای حل انتگرال I، $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ را با $\int_C f(z)\,dz$ مقایسه می کنیم یعنی:

$$\int_C f(z)\,dz=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{\Gamma} f(z)\,dz \tag{۱۹-۵}$$

که در آن C نیم دایره ای به شعاع بینهایت و در برگیرنده کل نیم صفحه فوقانی یعنی $y\geq 0$ و $f(z)$ همان $f(x)$ به ازای متغیر z می باشد.



شکل ۵-۲: مسیر C

■ لم جردن:

اگر با میل $|z|\to\infty$ ، حد $|f(z)|\to 0$ گردد، داریم:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz\to 0$$

بنابراین اگر برای تابعی لم جردن برقرار باشد، رابطه ۵-۱۹ برای تابع $f(x)$ با n قطب در نیم صفحه فوقانی ($y\geq 0$)بصورت زیر ساده خواهد شد:

$$\int_{C:y\geq 0} f(z)\,dz=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+0$$

$$\to\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{y\geq 0} f(z)\,dz=2\pi i\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left(p_i\right)\right) \tag{۲۰-۵}$$

مثال ۵-۱۱:

انتگرال زیر را محاسبه نمایید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^4+1\right)}dx$$

ابتدا لم جردن را بررسی می کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2}{\left(x^4+1\right)}\to f(z)=\frac{z^2}{\left(z^4+1\right)}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|f(z)\right|=\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{z^2}{\left(z^4+1\right)}\right|=0\quad ☑$$

بنابراین طبق رابطه ۵-۲۰ داریم:

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^4+1\right)}dx=\int_{y\geq 0}\frac{z^2}{\left(z^4+1\right)}dz$$

ابتدا نقاط تکین را محاسبه می کنیم:

$$f\left(z\right)=\frac{z^2}{\left(z^4+1\right)}\quad \text{نقاط تکین}: \rightarrow\left(z^4+1\right)=0\rightarrow z^4=-1$$

$$z^4=-1\rightarrow z=\left(-1\right)^{\frac{1}{4}}\rightarrow z=\left(1\angle\ \pi\right)^{\frac{1}{4}}=\underbrace{1^{\frac{1}{4}}}_{=1}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right),k=0,1,2,3$$

$$\begin{cases} k=0: & z=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\\ k=1: & z=\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right)\\ k=2: & z=\cos\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\\ k=3: & z=\cos\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-i\right) \end{cases}$$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقاط تکین در نیم صفحه فوقانی قرار دارند یا خیر؟

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\rightarrow y>0 ☑\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right)\rightarrow y>0 ☑\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\rightarrow y<0 ☒\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-i\right)\rightarrow y<0 ☒ \end{cases}$$

اکنون مانده تابع را در این نقاط محاسبه می کنیم:

$$f\left(z\right)=\frac{z^2}{\left(z^4+1\right)}$$

$$\rightarrow \operatorname{Res}\left(z_0\right)=\left.\frac{z^2}{\left(z^4+1\right)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_0}=\frac{1}{4z_0}$$

$$\rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\right)=\frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}\left(1+i\right)}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i}{2\sqrt{2}\times 2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(1-i\right)$$

$$\rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right)\right)=\frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}\left(-1+i\right)}\times\frac{-1-i}{-1-i}=-\frac{1+i}{2\sqrt{2}\times 2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{8}\left(1+i\right)$$

بنابراین:

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{y\geq 0} \frac{z^2}{\left(z^4+1\right)}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right)\right) = 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\right)$$

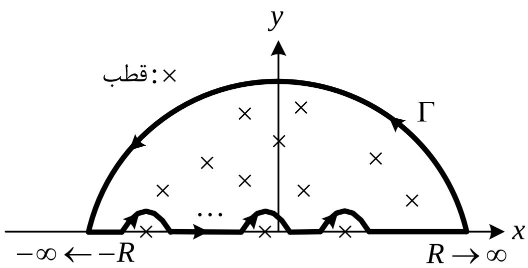
$$= 2\pi i\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{8}} - i\frac{\sqrt{2}}{8} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{8}} - i\frac{\sqrt{2}}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

با ذکر چند حالت خاص در انتگرال گیری حقیقی به کمک انتگرال گیری مختلط، این بخش را به پایان می بریم.

■ حالات خاص:

الف) $f(x)$ در روی محور حقیقی قطب داشته باشد:

اگر تابع $f(x)$ علاوه بر n قطب در نیم صفحه فوقانی ($y \geq 0$)، m قطب نیز روی محور حقیقی داشته باشد، مسیر اصلاح شده C بصورت زیر خواهد بود.



۵-۳: مسیر اصلاح شده C

آنگاه درصورت برقراری لم جردن داریم:

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + 0$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}\left(p_i\right)\right)+\pi i\left(\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}\left(p_i\right)\right) \qquad (۵-۲۱)$$

مثال ۵-۱۲:

انتگرال زیر را محاسبه نمایید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx$$

ابتدا لم جردن را بررسی می کنیم:

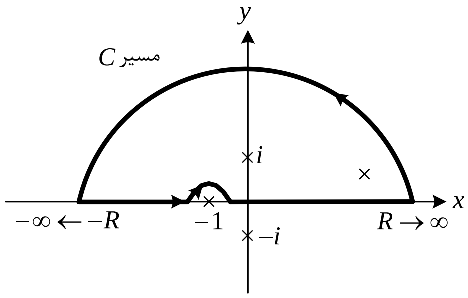
$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)} \rightarrow f(z) = \frac{1}{(z+1)\left(z^2+1\right)}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|f(z)\right| = \lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{1}{(z+1)\left(z^2+1\right)}\right| = 0 \quad \boxtimes$$

بنابراین طبق رابطه ۵-۲۰ داریم:

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx = \int_C \frac{1}{(z+1)\left(z^2+1\right)}dz$$

که در آن C مسیری مطابق شکل زیر است.



ابتدا نقاط تکین را محاسبه می کنیم:

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z^2+1)} \quad \text{نقاط تکین}: \rightarrow (z+1)(z^2+1)=0 \rightarrow \begin{cases} z^2=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$z^2=-1 \rightarrow z=(-1)^{\frac{1}{2}} \rightarrow z=(1\angle\pi)^{\frac{1}{2}}=\underbrace{1^{\frac{1}{2}}}_{=1}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)\right),k=0,1$$

$$\begin{cases} k=0: \quad z=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0+1i=i \\ k=1: \quad z=\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0-1i=-i \end{cases}$$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقاط تکین در نیم صفحه فوقانی قرار دارند یا خیر؟

$$\begin{cases} i \rightarrow y>0 \; \text{☑} \\ -i \rightarrow y<0 \; \text{☒} \\ -1 \rightarrow \text{روی محور حقیقی} \end{cases}$$

اکنون مانده تابع را در این نقاط محاسبه می کنیم:

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}=\frac{1}{z^3+z^2+z+1}$$

$$\rightarrow \operatorname{Res}(z_0)=\left.\frac{1}{(z^3+z^2+z+1)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{1}{3z^2+2z+1}\right|_{z=z_0}$$

$$\rightarrow \operatorname{Res}(i)=\frac{1}{3i^2+2i+1}=\frac{1}{-3+2i+1}=\frac{1}{-2+2i}\times\frac{-2-2i}{-2-2i}=\frac{-2-2i}{8}=\frac{-(1+i)}{4}$$

$$\rightarrow \operatorname{Res}(-1)=\frac{1}{3(-1)^2+2(-1)+1}=\frac{1}{3-2+1}=\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx = \int_C \frac{1}{(z+1)(z^2+1)} dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(i)\right) + \pi i\left(\mathrm{Res}(-1)\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-(1+i)}{4}\right) + \pi i\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi i}{2}(-1-i+1) = -\frac{\pi i^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

ب) انتگرال هایی به فرم $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)dx$ **یا** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)dx$:

برای حل چنین انتگرال هایی از فرمول اویلر استفاده می کنیم، یعنی:

$$e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax)$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)dx = \mathrm{Im}\left\{\oint_C f(z)e^{iaz}dz\right\} \qquad (۵-۲۲)$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)dx = \mathrm{Re}\left\{\oint_C f(z)e^{iaz}dz\right\} \qquad (۵-۲۳)$$

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۵-۱۳:

انتگرال های زیر را محاسبه نمایید:

۱) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x-1} dx$

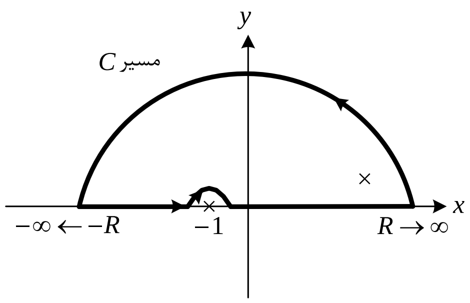
با استفاده از رابطه ۵-۲۳ داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x-1} dx = \mathrm{Re}\left\{\oint_C \frac{e^{iz}}{z-1} dz\right\}$$

ابتدا لم جردن را بررسی می کنیم:

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{e^{iz}}{z-1}\right| \overset{|e^{iz}|=1}{=} \lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{1}{z-1}\right| = 0 \quad ☑$$

که در آن C مسیری مطابق شکل زیر است.



ابتدا نقاط تکین را محاسبه می کنیم:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z-1} \quad \text{نقاط تکین} : z-1=0 \to z=1$$

که این نقطه تکین روی محور حقیقی قرار دارد. اکنون مانده تابع را در این نقطه محاسبه می کنیم:

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z-1}$$

$$\to \operatorname{Res}(z_0)=\left.\frac{e^{iz}}{(z-1)'}\right|_{z=z_0}=\left.e^{iz}\right|_{z=z_0}$$

$$\to \operatorname{Res}(1)=e^{i}$$

بنابراین:

$$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)\xrightarrow{\theta=1}e^{i}=\cos(1)+i\sin(1)$$

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z-1}dz=\pi i\operatorname{Res}(1)=\pi i\left(e^{i}\right)=\pi i\left(\cos(1)+i\sin(1)\right)=\pi i\cos(1)-\pi\sin(1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{x-1}dx=\operatorname{Re}\left\{\oint_C\frac{e^{iz}}{z-1}dz\right\}=\operatorname{Re}\{\pi i\cos(1)-\pi\sin(1)\}=-\pi\sin(1)$$

۲) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x(x^2+4)}dx$

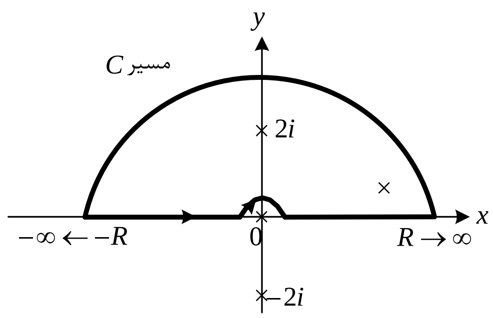
با استفاده از رابطه ۵-۲۳ داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x(x^2+4)}dx=\operatorname{Im}\left\{\oint_C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}dz\right\}$$

ابتدا لم جردن را بررسی می کنیم:

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}\right|\overset{|e^{iz}=1|}{=}\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{1}{z(z^2+4)}\right|=0 \quad ☑$$

که در آن C مسیری مطابق شکل زیر است.



ابتدا نقاط تکین را محاسبه می کنیم:

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}$$ نقاط تکین : $z(z^2+4)=0\to z=0,\pm 2i$

اکنون باید بررسی کنیم که آیا این نقاط تکین در نیم صفحه فوقانی قرار دارند یا خیر؟

$$\begin{cases}2i\to y>0 ☑\\ -2i\to y>0 ☑\\ 0\to \text{روی محور حقیقی}\end{cases}$$

اکنون مانده تابع را در این نقاط محاسبه می کنیم:

$$\to \operatorname{Res}(z_0)=\left.\frac{e^{iz}}{\left(z\left(z^2+4\right)\right)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{e^{iz}}{\left(z^3+4z\right)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{e^{iz}}{3z^2+4}\right|_{z=z_0}=\frac{e^{iz_0}}{3z_0^2+4}$$

$$\operatorname{Res}(2i)=\frac{e^{2i^2}}{3(2i)^2+4}=\frac{e^{-2}}{-12+4}=-\frac{e^{-2}}{8}$$

$$\operatorname{Res}(0)=\frac{e^{0}}{3(0)^2+4}=\frac{1}{4}$$

بنابراین:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+4\right)}dz=2\pi i\operatorname{Res}(2i)+\pi i\operatorname{Res}(0)=2\pi i\left(-\frac{e^{-2}}{8}\right)+\pi i\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi i}{4}\left(1-e^{-2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x\left(x^2+4\right)}dx=\operatorname{Im}\left\{\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+4\right)}dz\right\}=\operatorname{Im}\left\{\frac{\pi i}{4}\left(1+e^{-2}\right)\right\}=\frac{\pi}{4}\left(1+e^{-2}\right)$$

فصل ششم:

معادلات با مشتقات جزئی

◄ بخش ششم: معادلات با مشتقات جزئی

۶-۱- مقدمه:

معادلات دیفرانسیلی توابعی که شامل چندین متغیر باشند، را معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی گویند. درواقع منظور از مشتقات جزئی مشتق توابع نسبت به پارامترهای مختلف می باشد. بطور مثال برای تابعی مثل $f(x,y,z,)$ مشتقات جزئی توابعی مانند $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ می باشند. همچنین معادله ای مانند

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \tag{۶-۱}$$

یک معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی بشمار می آید.

برای حل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی و بدست آوردن تابع f چندین روش وجود دارد:

۱. روش جداسازی متغیرها
۲. روش دالامبر
۳. حل به کمک انتگرال گیری
۴. روش لاگرانژ

۶-۲- حل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به روش جداسازی متغیرها:

در روش جداسازی متغیرها، تابع چند متغیره را بصورت ضرب توابعی از جنس تک تک متغیرهای آن می نویسیم، مثلا:

$$f(x,y,z,)=X(x)Y(y)Z(z)$$

سپس تابع جایگزین را در معادله اصلی قرار داده و آن را حل می کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶-۱:

معادله موج های زیر را با شرایط اولیه داده شده حل نمایید.

۱) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(\ell,t)=0 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$$

ابتدا تابع چند متغیره را بصورت ضرب توابعی از جنس تک تک متغیرهای آن می نویسیم:

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

بنابراین:

$$u(x,t)=X(x)T(t)\rightarrow\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)T(t) \\ \frac{\partial u}{\partial t}=X(x)T'(t) \end{cases}\rightarrow\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)T(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X(x)T''(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=X(0)T(t)=0 \to X(0)=0 \\ u(\ell,t)=X(\ell)T(t)=0 \to X(\ell)=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \to X''(x)T(t)-\frac{1}{C^2}X(x)T''(t)=0 \to \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{C^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

نکته: در حل معادلاتی نظیر $\frac{f''}{f}$ یکی از سه حالت زیر ممکن است پیش آید:

$$\frac{f''}{f}=\begin{cases} k^2 \\ 0 \\ -k^2 \end{cases}$$

اکنون سه حالت را به ترتیب بررسی می کنیم:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=k^2 \to X''(x)-k^2X(x)=0 \to X(x)=Ae^{kx}+Be^{-kx}$$

$$\begin{cases} X(0)=0 \to X(0)=Ae^0+Be^0=0 \to A+B=0 \to A=-B \\ X(\ell)=0 \to X(\ell)=Ae^{k\ell}+Be^{-k\ell}=0 \to Ae^{k\ell}-Ae^{-k\ell}=0 \to A\underbrace{\left(e^{k\ell}-e^{-k\ell}\right)}_{\neq 0}=0 \to \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\to X(x)=Ae^{kx}+Be^{-kx}=0e^{kx}+0e^{-kx}=0 \quad \boxtimes$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=0 \to X''(x)=0 \to X(x)=Ax+B$$

$$\begin{cases} X(0)=B=0 \to B=0 \\ X(\ell)=A\ell+B=0 \to A\ell=0 \to A=0 \end{cases} \to\to \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \quad \boxtimes$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-k^2 \to X''(x)+k^2X(x)=0 \to X(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$$

$$\begin{cases} X(0)=A\cos(0)+B\overbrace{\sin(0)}^{=0}=0 \to A=0 \\ X(\ell)=A\cos(k\ell)+B\sin(k\ell)=0 \to B\sin(k\ell)=0 \to k\ell=n\pi \to k=\frac{n\pi}{\ell} \end{cases}$$

$$X(x)=B\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

اکنون قسمت دوم معادله را حل می کنیم:

$$\frac{1}{C^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=-k^2 \to \frac{T''(t)}{T(t)}=-k^2C^2 \to T''(t)+(kC)^2T(t)=0 \to T(t)=C\cos(kCt)+D\sin(kCt)$$

$$u(x,0)=X(x)T(0)=0 \to T(0)=0$$

$$T(0)=C\cos(0)+D\overbrace{\sin(0)}^{=0}=0 \to C=0$$

$$\to T(t)=D\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}Ct\right)$$

$$\to u(x,t)=X(x)T(t)=\left(B\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right)\left(D\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}Ct\right)\right)=K_1\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}Ct\right)$$

۲) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=C^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\begin{cases} u(0,t)=0 & \\ u(\pi,t)=0 & 0\le t\le\pi \\ u(x,0)=\sin(x) & 0\le x\le\pi \end{cases}$$

ابتدا تابع چند متغیره را بصورت ضرب توابعی از جنس تک تک متغیرهای آن می نویسیم:

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

بنابراین:

$$u(x,t)=X(x)T(t)\to\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=X'(x)T(t)\to\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)T(t)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=X(x)T'(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}u(0,t)=X(0)T(t)=0\to X(0)=0\\ u(\pi,t)=X(\pi)T(t)=0\to X(\pi)=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\to X(x)T'(t)-C^2X''(x)T(t)=0\to\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{C^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

مانند مثال قبل داریم:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{C^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=-k^2$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-k^2\to X''(x)+k^2X(x)=0\to X(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$$

$$\begin{cases}X(0)=A\cos(0)+B\overbrace{\sin(0)}^{=0}=0\to A=0\\ X(\pi)=A\cos(k\pi)+B\sin(k\pi)=0\to B\sin(k\pi)=0\to k\in N\end{cases}$$

$$X(x)=B\sin(kx)$$

$$\frac{1}{C^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=-k^2\to\frac{T'(t)}{T(t)}=-(kC)^2\to T(t)=Ce^{-(kC)^2t}$$

$$\to u(x,t)=X(x)T(t)=\left(B\sin(kx)\right)\left(Ce^{-(kC)^2t}\right)=k_1\sin(kx)e^{-(kC)^2t}$$

$$u(x,0)=X(x)T(0)=\sin x\to k_1\sin(kx)e^0=\sin x\to k_1\sin(kx)=\sin x\to\begin{cases}k_1=1\\ k=1\end{cases}$$

بنابراین:

$$u(x,t)=\sin(x)e^{-C^2t}$$

۶-۳- حل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به روش دالامبر:

در این روش برای حل معادله از تغییر متغیرهای زیر استفاده می کنیم:

$$u(x,t)=u(z,v)$$

$$\rightarrow\begin{cases}z=x-ct\\ v=x+ct\end{cases}\qquad (۶-۲)$$

بنابراین:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=1}+\frac{\partial u}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1}\rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial v}$$

$$\rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}+\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\qquad (۶-۳)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{=-C}+\frac{\partial u}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=C}\rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=C\left(-\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial v}\right)$$

$$\rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}+\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right)\qquad (۶-۴)$$

مثال ۶-۲:

معادله موج زیر را حل نمایید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

با استفاده از روش دالامبر و تغییر متغیر های فوق داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$\rightarrow\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}+\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right)-\frac{1}{\cancel{C^2}}\left(\cancel{C^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}+\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right)\right)=0$$

$$\rightarrow\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}+\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}+\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right)=0$$

$$\rightarrow\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}+\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}}-\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}-\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}}=0\rightarrow 4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}=0$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}=0\rightarrow\int\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial v}\partial z=f_1(v)\rightarrow\frac{\partial u}{\partial v}=f_1(v)$$

$$u=\underbrace{\int f_1(v)\partial v}_{f_3(v)}+f_2(z)$$

$$\rightarrow u(x,t)=f_3(x+ct)+f_2(x-ct)$$

۶-۴- حل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به روش انتگرال گیری:

یک روش دیگر در حل معادلات دیفرانسیلی انتگرال گیری می باشد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۶-۲:

معادله موج زیر را حل نمایید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x}{2}\cos(y)$$
$$u(x,0) = 1 - x$$
$$u(0,y) = 1 + y$$

با استفاده از روش انتگرال گیری داریم:

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial y = \int \frac{x}{2}\cos(y)\partial y \to \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{x}{2}\sin(y) + h(x)$$

$$\int \frac{\delta u}{\delta x}\partial x = \int \frac{x}{2}\sin(y) + h(x)\partial x \to u(x,y) = \frac{x^2}{4}\sin(y) + \underbrace{\int h(x)\partial x}_{g(x)} + f(y)$$

$$\to u(x,y) = \frac{x^2}{4}\sin(y) + g(x) + f(y)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \frac{x^2}{4}\sin(0) + g(x) + f(0) = g(x) + f(0) = 1 - x \\ u(0,y) = 0 \times \sin(y) + g(0) + f(y) = g(0) + f(y) = 1 + y \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} g(x) + f(0) = 1 - x \\ g(0) + f(y) = 1 + y \end{cases} \to g(x) + f(y) = 1 - x + 1 + y - f(0) - g(0) = 2 - x + y - f(0) - g(0)$$

بنابراین:

$$\to u(x,y) = \frac{x^2}{4}\sin(y) + 2 - x + y - f(0) - g(0)$$

$$u(x,0) = \frac{x^2}{4}\sin(0) + 2 - x + 0 - f(0) - g(0) = 1 - x$$

$$\to 2 - x - f(0) - g(0) = 1 - x \to 1 - f(0) - g(0) = 0 \to f(0) + g(0) = 1$$

$$\to u(x,y) = \frac{x^2}{4}\sin(y) + 2 - x + y - 1 = \frac{x^2}{4}\sin(y) + 1 - x + y$$

۶-۵- حل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به روش لاگرانژ:

اگر فرم کلی معادله دیفرانسیلی را بتوان به شکل

$$P(x,y,z)\frac{dz}{dx} + Q(x,y,z)\frac{dz}{dy} = R(x,y,z) \qquad (۶-۵)$$

مرتب نمود، برای یافتن جواب این معادله از دستگاه لاگرانژ زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \qquad (۶-۶)$$

با حل این معادله دو جواب به فرم کلی

$$u(x,y,z)=C_1$$
$$u(x,y,z)=C_2 \qquad (۶-۷)$$

بدست می آید. بنابراین جواب عمومی معادله فوق به فرم $F(u,v)=0$ خواهد بود.

مثال ۶-۳:

معادله موج زیر را حل نمایید.

$$x\frac{dz}{dx}-\frac{dz}{dy}=yz$$

ابتدا دستگاه لاگرانژ را تشکیل می دهیم:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{yz}$$

بنابراین:

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{-1}\to\ln(x)=-y+C_1$$

$$\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{yz}\to -ydy=\frac{dz}{z}\to -\int ydy=\int\frac{dz}{z}\to\frac{-y^2}{2}=\ln(z)+C_2$$

$$\ln(z)+\frac{y^2}{2}=-C_2=C_3$$

$$\to F\left(y+\ln(x),\ln(z)+\frac{y^2}{2}\right)=0$$

۶-۶- دسته بندی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با مشتقات جزئی:

معادله مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0 \qquad (۶-۸)$$

که در آن a، b و c توابعی از x و y هستند. بنابراین:

$$\begin{cases} b^2-ac>0 & \text{معادله هذلولی گون} \\ b^2-ac=0 & \text{معادله سهمی گون} \\ b^2-ac<0 & \text{معادله بیضی گون} \end{cases} \qquad (۶-۹)$$

بطور مثال:

الف) معادله لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$ بیضی گون است.

ب) معادله گرما $u_t=C^2u_{xx}$ سهمی گون است.

ج) معادله موج $u_{tt}=C^2u_{xx}$ هذلولی گون است.

همچنین معادله دیفرانسیل زیر معادله مشخصه معادله ۶-۸ نامیده می شود:

$$a(dy)^2-2b\,dx\,dy+c(dx)^2=0 \qquad (۶-۱۰)$$

۱. برای یک معادله هذلولی گون، معادله ۶-۱۰ دارای دو جواب

$$\begin{cases}\varphi(x,y)=C_1\\ \psi(x,y)=C_2\end{cases}$$

است و تغییر متغیر

$$\begin{cases}\zeta=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$$

معادله دیفرانسیل را به شکل کانونی تحویل می دهد.

۲. برای یک معادله سهمی گون، معادله مشخصه ۶-۱۰ دارای یک جواب بصورت $\varphi(x,y)=C$ است. با تغییر متغیری مشابه حالت قبل بطوریکه

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0$$

به فرم کانونی تبدیل می شود.

۳. برای یک معادله از نوع بیضی گون، جوابهای معادله مشخصه به فرم

$$\begin{cases}\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1\\ \varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2\end{cases}$$

خواهند بود که با تغییر متغیر

$$\begin{cases}\zeta=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$$

به فرم کانونی تبدیل خواهد شد.

مثال ۶-۴:

نوع معادلات مرتبه دوم زیر را مشخص نمایید:

$$۱)\; e^{2x}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xe^{x+y}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+e^{2y}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

$$\begin{cases}a=e^{2x}\\ b=xe^{x+y}\to b^2-ac=x^2e^{2(x+y)}-\underbrace{e^{2x}e^{2y}}_{e^{2(x+y)}}=\underbrace{e^{2(x+y)}}_{>0}\left(x^2-1\right)\\ c=e^{2y}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x^2-1>0 \text{ معادله هذلولی گون } \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases} \\ x^2-1=0 \text{ معادله سهمی گون } \rightarrow x=\pm 1 \\ x^2-1<0 \text{ معادله بیضی گون } \rightarrow -1<x<1 \end{cases}$$

۲) $(1-k)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-3u_y+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

$$\begin{cases} a=1-k \\ b=k \\ c=2 \end{cases} \rightarrow b^2-ac=k^2-2(1-k)=k^2+2k-2$$

بنابراین:

$$k^2+2k-2=0 \rightarrow k=-1\pm\sqrt{3} \quad \text{معادله سهمی گون}$$

$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$
$-$ معادله هذلولی گون	$+$ معادله بیضی گون	$-$ معادله هذلولی گون

مثال ۶-۴:

نوع معادلات مرتبه دوم و تغییر متغیرهای لازم برای فرم کانونیک در معادلات زیر چیست؟

۱) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

$$\begin{cases} a=y^2 \\ b=xy \rightarrow b^2-ac=x^2y^2-x^2y^2=0 \\ c=x^2 \end{cases}$$

بنابراین سهمی گون است و معادله مشخصه آن برابر است با:

$$y^2(\partial y)^2-2xy\partial x\partial y+x^2(\partial x)^2=0 \xrightarrow{\times\frac{1}{(\partial x)^2}} y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}+x^2=0$$

$$\rightarrow \left(y\frac{\partial y}{\partial x}-x\right)^2=0 \rightarrow y\frac{\partial y}{\partial x}-x=0 \rightarrow y\partial y=x\partial x$$

$$\rightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C \rightarrow y^2-x^2=2C=C_1$$

$$\varphi(x,y)=y^2-x^2$$

$$\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}_{-2x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}_{2y}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\rightarrow -2x\frac{\partial\psi}{\partial y}-2y\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\rightarrow x\frac{\partial\psi}{\partial y}=y\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\rightarrow\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\quad(*)$$

بنابراین $\psi(x,y)$ هر معادله ای که در $(*)$ صدق کند می تواند باشد.

۲) $x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-u_x+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$

$$\begin{cases}a=x^2\\ b=0\quad\rightarrow b^2-ac=-x^2y^2<0\\ c=y^2\end{cases}$$

بنابراین بیضی گون است و معادله مشخصه آن برابر است با:

$$x^2(\partial y)^2+y^2(\partial x)^2=0\xrightarrow{\times\frac{1}{(\partial x)^2}}x^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+y^2=0$$

$$\rightarrow\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=-\frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\pm i\frac{y}{x}\rightarrow\begin{cases}\frac{\partial y}{\partial x}=i\frac{y}{x}\rightarrow\frac{\partial y}{y}=i\frac{\partial x}{x}\rightarrow\ln(y)=i\ln(x)+C_1\rightarrow\ln(y)-i\ln(x)=C_1\\ \frac{\partial y}{\partial x}=-i\frac{y}{x}\rightarrow\frac{\partial y}{y}=-i\frac{\partial x}{x}\rightarrow\ln(y)=-i\ln(x)+C_2\rightarrow\ln(y)+i\ln(x)=C_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi(x,y)=\ln(y)-i\ln(x)\\ \psi(x,y)=\ln(y)+i\ln(x)\end{cases}$$